

GEOMETRIA

ARQUÍMEDES

El método relativo a los teoremas mecánicos

Introducción, traducción, notas y apéndices a cargo de

Pedro Miguel González Urbaneja
Joan Vaqué Jordi

Publicacions de la
Universitat Autònoma de Barcelona

Edicions de la
Universitat Politècnica de Catalunya

ARQUÍMEDES

El método relativo a los teoremas mecánicos

La vía heurística de los descubrimientos matemáticos de Arquímedes

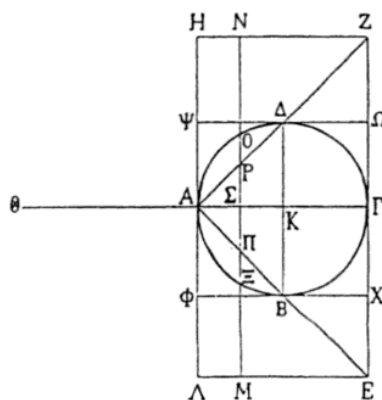
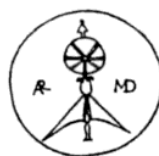
Introducción, traducción, notas y apéndices a cargo de

Pedro Miguel González Urbaneja
Joan Vaqué Jordi

Figuras realizadas por **Javier González Urbaneja**



Δός μοί ποῦ στῶ καὶ κινῶ τὴν γῆν.

Publicacions de la
Universitat Autònoma de Barcelona

Edicions de la
Universitat Politècnica de Catalunya

1993

Edició:



Servei de Publicacions
de la Universitat Autònoma de
Barcelona
08193 Bellaterra (Barcelona)



Universitat Politècnica de Catalunya
Jordi Girona Salgado, 31
08034 Barcelona

Producció: Servei de Publicacions de la UPC, 1993
Impressió: Gramagraf, SCCL

Dipòsit legal: B. 7.966-93
ISBN: 84-7653-268-7
ISBN: 84-7653-267-9 (obra completa)

radical entre finito e infinito. Introduciendo el concepto de «*tan pequeño como se quiera*», equivalente a nuestro proceso de «*paso al límite*», encuentra, con su teoría de magnitudes, una escapatoria a los problemas planteados por el infinito y lo inconmensurable, mediante un recurso genial que desarrolla en tres estadios: una definición, un axioma y un método. Como lo inexpressable era la razón entre dos cantidades inconmensurables, Eudoxo elimina la dificultad definiendo no la razón misma, sino la igualdad de razones de la siguiente forma (Definición V.5 de “**Los Elementos**” de Euclides):

“Se dice que la primera de cuatro magnitudes tiene la misma razón con la segunda que la tercera con la cuarta, cuando tomando cualquier múltiplo de la primera y de la tercera, y de la segunda y cuarta, el múltiplo de la primera es mayor, igual o menor que el de la segunda, según que el múltiplo de la tercera sea mayor, igual o menor que el de la cuarta.”

Es decir si a, b son dos magnitudes geométricas del mismo tipo y c, d son también del mismo tipo (aunque no necesariamente del mismo tipo que a y b), Eudoxo define que las razones a/b y c/d son «*proporcionales*»: $a/b = c/d$, cuando para cualquier par de enteros positivos n y m , se tiene:

$na > mb$ y $nc > md$ ó $na = mb$ y $nc = md$, ó $na < mb$ y $nc < md$.

Es conveniente observar que la definición de Eudoxo generaliza la noción pitagórica de proporcionalidad de razones de enteros y sorprende cuán próxima está a «*las cortaduras*» que utilizó R. Dedekind en el siglo XIX para la fundamentación del conjunto de los números reales.

Veamos con esta nueva definición de proporcionalidad la demostración rigurosa de la Proposición VI.1 de “**Los Elementos**” que se citó en el apartado anterior:

Sobre la recta CB tracemos a partir de B , $m-1$ segmentos iguales a CB y unamos los puntos de división B_2, B_3, \dots, B_m con el vértice A (fig.18).

De forma similar tracemos a partir de E , $n-1$ segmentos iguales a CB y unamos los puntos de división E_2, E_3, \dots, E_n con el vértice A . Se tiene $B_m C = m(BC)$, $AB_m C = m(ABC)$, $E_n D = n(ED)$, $AE_n D = n(AED)$. Ahora según la Proposición I.38 de “**Los Elementos**” y su consecuencia: «*De triángulos que tienen la misma altura tiene mayor área el que tiene mayor base*», se deduce que el triángulo $AB_m C$ es mayor, igual o menor que el triángulo $AE_n D$ según que $m(BC)$ sea mayor, igual o menor que $n(DE)$, por tanto según la definición de Eudoxo de proporción se tiene la tesis

literatura matemática. La importancia del axioma la ha remarcado D. Hilbert, en su obra **“Los principios fundamentales de la Geometría”**, donde le asigna un papel fundamental en la estructura de la Geometría. Arquímedes lo enuncia en el postulado V del Libro I de su obra **“Sobre la Esfera y el Cilindro”**:

“Dadas dos líneas, dos superficies o dos sólidos desiguales, si el exceso de una de estas figuras sobre la otra se añade a sí mismo un cierto número de veces, se puede superar una u otra de las figuras que se comparan entre sí.”

Arquímedes repite el enunciado en la carta a Dositeo, que acompaña a su obra **“Sobre la Cuadratura de la Parábola”**:

“[...] Para demostrar este teorema he utilizado el siguiente lema : «Si la diferencia entre dos magnitudes se añade sucesivamente a sí misma, llegará a ser mayor que un área dada». Los geómetras anteriores a mí [Eudoxo,] también se han apoyado en este lema para demostrar que los círculos son entre sí como la razón duplicada¹ de sus diámetros y las esferas como la razón triplicada²; que una pirámide equivale a un tercio de un prisma de la misma base y altura que la pirámide y un cono igual al tercio del cilindro de igual base y altura que el cono, [....].”

Vemos cómo Arquímedes advirtió que el principio no debe ser una definición ni un teorema, sino un axioma, en el que, al igual que él mismo, se habría apoyado Eudoxo para abordar las cuestiones infinitesimales.

En la Geometría griega se considera que las figuras curvilíneas como círculos o segmentos de parábola tienen áreas que son magnitudes geométricas del mismo tipo que las figuras poligonales. Dada una figura curvilínea A, para determinar su área $a(A)$ se buscará una sucesión de polígonos $\{P_1, P_2, \dots, P_n, \dots\}$, que aproximen progresivamente el área de A. El método de exhaución se ideará para sustituir con absoluto rigor en la demostración de la magnitud de un área o volumen a la idea vaga e intuitiva de que el área de A es «el límite» de las áreas de los polígonos $\{P_1, P_2, \dots, P_n, \dots\}$. El «horror al infinito» evitaba «pasar al límite». En vez

1 Es decir, como la razón de los cuadrados.

2 Es decir, como la razón de los cubos.

de ello se intenta demostrar que se puede encontrar un polígono en la sucesión $\{P_1, P_2, \dots, P_n, \dots\}$ cuyo área difiera del área de la figura A en una cantidad menor que otra prefijada. Simbólicamente dado $\varepsilon > 0$ se debe encontrar un polígono P_n tal que la diferencia $a(A) - a(P_n)$ sea menor que ε para n suficientemente grande. A este respecto cumple un papel fundamental la Proposición X.1 de “**Los Elementos**” que Euclides demuestra aplicando el Axioma de Eudoxo-Archímedes:

“Dadas dos magnitudes desiguales, si de la mayor se resta una magnitud mayor que su mitad y de lo que queda otra magnitud mayor que su mitad y se repite continuamente este proceso, quedará una magnitud menor que la menor de las magnitudes dadas.”

resultado conocido por algunos historiadores como «*Principio de Eudoxo*» y que abre las puertas al «*método de exhaustión*», con el que, como hemos visto en el relato de Arquímedes, Eudoxo demuestra rigurosamente los teoremas sobre el círculo, así como sobre la pirámide y el cono, que habían sido enunciados por Hipócrates y Demócrito, respectivamente, y que aparecerán en “**Los Elementos**” de Euclides en las Proposiciones XII.2, XII.5 y XII.10.

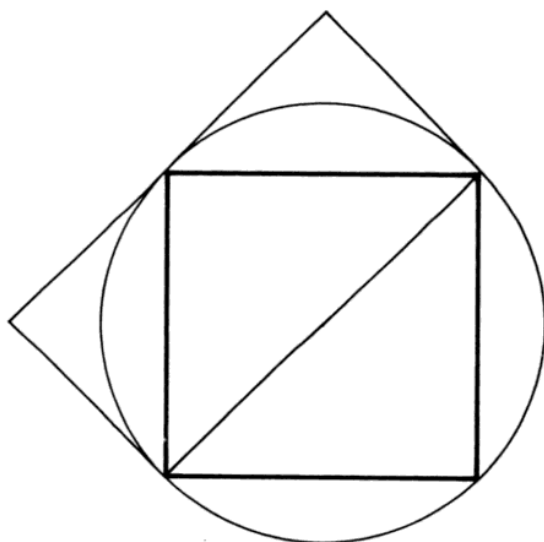


Figura 19

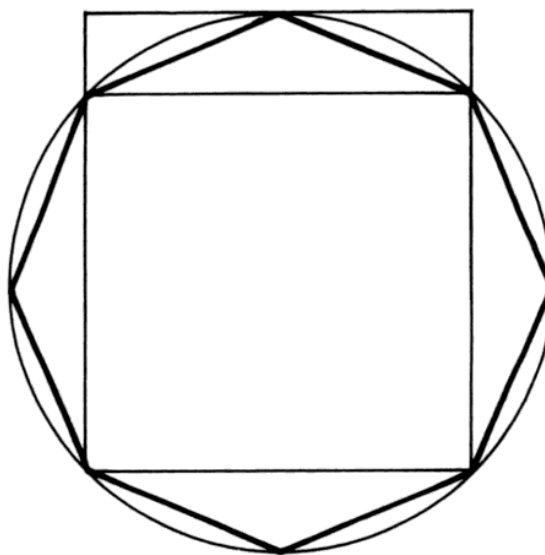


Figura 20

El Principio de Eudoxo permite estimar el error que se comete en cada paso del método de Antifón. En efecto, es fácil ver que, inscribiendo un cuadrado en un círculo, la diferencia entre ambos es menor que la mitad del área del círculo. Si ahora se considera el octógono

nidad», el «*Principio de Eudoxo*» y el «*Método de exhaución*», procedimientos que según hemos visto son la traducción geométrica de la operación de paso al límite. Aceptando de una vez por todas el Axioma de continuidad, los griegos ya no tendrán que recurrir en cada construcción, como Antifón y Brysón, a una nueva evidencia intuitiva. El método de exhaución de Eudoxo proporciona al desarrollo matemático un rigor lógico absoluto, transformando en rigurosos los argumentos infinitesimales simplemente plausibles de sus antecesores.

Sobre el nombre de «*Método de exhaución*» conviene observar que es bastante inapropiado porque nunca se llega a agotar, con los polígonos que van aproximando, la figura cuya magnitud se quiere estudiar. Es más, la exhaución paradójicamente pretende resolver rigurosamente el problema de la «*inexhaustividad del infinito*». De hecho el nombre del método no lo utilizaron los griegos, sino que es una desafortunada acuñación introducida en el siglo XVII por Gregory de Saint Vincent (1584-1667), pero su uso se ha hecho habitual en la literatura matemática, aunque alguno de los más importantes estudiosos de Arquímedes, como E.J. Dijksterhuis se resisten a llamarlo así y prefieren denominarle «*el método indirecto del proceso infinito*».

1.3. Consecuencias de la fundamentación.

1.3.1. Sobre la naturaleza de la geometría griega.

La solución de la crisis de los irracionales con la teoría de magnitudes de Eudoxo, que ha quedado plasmada en el Libro V de «**Los Elementos**» de Euclides, constituyendo a partir de entonces la médula de la Geometría griega, fue un magnífico éxito científico, pero tomó una forma geométrico-deductiva de acuerdo con la filosofía platónica. Ciertamente que en estos momentos la crisis no podía solventarse con la definición de número irracional, ya que ello hubiera precisado un desarrollo considerable de las técnicas de la Aritmética de la computación, lo que no podía darse en un ambiente científico dominado por el idealismo platónico, que despreciando el estudio de la dimensión sensible de la realidad, rechazaba de forma elitista las aplicaciones prácticas por considerarlas corruptoras y degradantes. Si los científicos griegos no idearon un sistema de numeración manejable, mal podían prestar atención a las cuestiones calculísticas, que además eran objeto de una actividad, que llamaban «*Logística*», de rango intelectual inferior a la Aritmética, de modo análogo a como de las aplicaciones prácticas de la Geometría, se ocupaba una actividad inferior que llamaban «*Geodesia*».

Otra consecuencia de la crisis de los irracionales fue la omnipotencia y omnipresencia de la Geometría en la Matemática griega. Al limitar la Aritmética al estudio de los enteros, se impidieron desarrollos de tipo algebraico, el Algebra se hizo retórica y geométrica más que numérica y simbólica. Esta realidad produjo un doble efecto a tener en cuenta para entender el desarrollo de la Geometría griega. Por una parte, los limitados conceptos numéricos de los griegos no permitían asignar a las figuras geométricas números que midieran sus áreas o sus volúmenes y por tanto tenían que calcular directamente con las figuras, que se trataban como magnitudes. Para llevar a cabo la cuadratura o cubatura de una figura, los griegos debían encontrar la razón de la figura y otra figura previamente conocida, por ejemplo la razón entre un segmento de parábola y un triángulo inscrito, como hace Arquímedes en **“Sobre la Cuadratura de la Parábola”** o en la Proposición I del **MÉTODO**. Es por ello por lo que los griegos desarrollaron, como se ha visto, una muy perfeccionada teoría de magnitudes y proporciones, sobre todo por parte de Eudoxo.

Por otra parte esta limitación algebraica hizo imposible la introducción de nuevas curvas por medio de ecuaciones. Las curvas se obtenían constructivamente mediante lugares geométricos o intersección de superficies y también a través de relaciones de áreas o longitudes, que daban la propiedad de definición de la curva, lo que Apolonio (262-190 a.J.C.) llamaría el «*Sýmptoma*» de la curva. De esta forma, el elenco de curvas que manejaron los griegos hubo de ser necesariamente muy limitado (las cónicas de Menecmo y Apolonio, la cuadratriz de Hippias o Dinóstrato, la cisoide de Diocles, la hipopede de Eudoxo, la concoide de Nicomedes, y pocas más). Además, de acuerdo con el punto de vista de la Filosofía eleática, la Geometría griega, con la excepción de la de Arquímedes, adquirió un carácter excesivamente estático, como consecuencia del papel muy escaso que tuvo en la ciencia griega los conceptos de movimiento y variación continua de cantidades. Así por ejemplo, para Euclides, un círculo no es el resultado de un movimiento de giro de un segmento en torno a uno de sus extremos, sino el conjunto de todos los puntos que equidistan de un punto fijo. El concepto se expresa así en lenguaje eleático, mediante la descripción de la esencia y no mediante la descripción del fenómeno de la generación del círculo. Los griegos sólo estudiaron el movimiento uniforme (circular o lineal) y no discutieron los fenómenos de cambio o variabilidad en términos cuantitativos. En este sentido puede decirse que la ausencia de una auténtica Cinemática provocó que no se abordara seriamente la diferenciación.

1.3.2. Sobre el infinito aristotélico.

La elaboración de la teoría de magnitudes mediante la que Eudoxo resuelve de forma provisional, pero rigurosa, el problema del infinito matemático, tiene una gran influencia sobre la concepción que Aristóteles y su Escuela tienen sobre el infinito. De hecho en la “**Física**”, donde expone su concepción sobre el infinito, la continuidad, la divisibilidad de magnitudes y el movimiento, Aristóteles conjuga el axioma de continuidad con el Principio de Eudoxo cuando manifiesta (“**Física**”, VIII.10) :

“Adicionando continuamente a una cantidad finita, sobrepasaré toda cantidad finita, y lo mismo, sustrayendo continuamente de una cantidad, llegaré a una cantidad menor que cualquier otra.”

Algunos historiadores atribuyen a Aristóteles un tratado sobre los problemas infinitesimales con el título “**Sobre las líneas indivisibles**”. Parece que la autenticidad de esta obra no está muy asegurada, pero en cualquier caso los problemas que presuntamente trataría fueron objeto de controversia entre los filósofos del Liceo y Jenócrates, que a la sazón dirigía la Academia platónica. Mientras éste defendía los indivisibles fijos, creyendo incluso que resolvían las paradojas de Zenón, el Liceo, en sus especulaciones sobre la naturaleza del infinito, la existencia de indivisibles o infinitesimales y la divisibilidad de cantidades continuas, mantenía la continua divisibilidad de los entes geométricos:

“lo que es infinitamente divisible es continuo”.

Aristóteles considera toda magnitud finita, pero, como admite la infinita divisibilidad, rechaza el atomismo geométrico. La antinomia entre rechazo o admisión del infinito es resuelta acuñando los términos «*actual*» y «*potencial*». Un infinito «*en acto*», es decir, un todo constituido de una infinidad actual de cosas dadas, no puede ser pensado como inteligible; sin embargo sí se puede pensar en una magnitud creciente por encima «*en potencia*» de todo límite, o en una serie de magnitudes cada vez más pequeñas que «*en potencia*» pueden hacerse más pequeñas que cualquier magnitud. Pero estas magnitudes que no están dadas como una infinidad acabada, siendo susceptibles de prolongación «*tanto como se quiera*», puede decirse que son infinitas «*en potencia*». No obstante la doctrina aristotélica se hace confusa, por razones metafísicas, cuando se aplica al número, porque afirma el infinito extensivo del número, pero niega su divisibilidad indefinida. En efecto, hay un pasaje de la “**Física**” donde sintéticamente Aristóteles



**Cambridge
Elements**

Ancient Philosophy

The Hedonism of Eudoxus of Cnidus

Richard Davies

ISSN 2631-4118 (online)

ISSN 2631-410X (print)

Obras póstumas de Eudoxo de Cnido



Shaftesbury Road, Cambridge CB2 8EA, United Kingdom

One Liberty Plaza, 20th Floor, New York, NY 10006, USA

477 Williamstown Road, Port Melbourne, VIC 3207, Australia

314–321, 3rd Floor, Plot 3, Splendor Forum, Jasola District Centre,
New Delhi – 110025, India

103 Penang Road, #05–06/07, Visioncrest Commercial, Singapore 238467

Cambridge University Press is part of Cambridge University Press & Assessment,
a department of the University of Cambridge.

We share the University's mission to contribute to society through the pursuit of
education, learning and research at the highest international levels of excellence.

www.cambridge.org

Information on this title: www.cambridge.org/9781009462600

DOI: [10.1017/9781009321532](https://doi.org/10.1017/9781009321532)

© Richard Davies 2023

This publication is in copyright. Subject to statutory exception and to the provisions
of relevant collective licensing agreements, no reproduction of any part may take
place without the written permission of Cambridge University Press & Assessment.

First published 2023

A catalogue record for this publication is available from the British Library

ISBN 978-1-009-46260-0 Hardback

ISBN 978-1-009-32151-8 Paperback

ISSN 2631-4118 (online)

ISSN 2631-410X (print)

Cambridge University Press & Assessment has no responsibility for the persistence or
accuracy of URLs for external or third-party internet websites referred to in this
publication and does not guarantee that any content on such websites is, or will
remain, accurate or appropriate.

1 Eudoxus: Who He?

1.1 'Tempore Eudoxi'

The Cnidus (or Knidos) that gives Eudoxus his toponym was a city on what is now the southern coast of Turkey. Standing at the head of an isthmus, Cnidus was a flourishing seaport with two harbours and was colonised by astute Spartans at an early date. In 394 BCE, a decisive naval battle nearby saw the city pass under Athens' control. It may be that Eudoxus' father was prominent in the previous regime, and fell on hard times when the Athenians took over, which might explain why Eudoxus had to lodge in Piraeus when he first visited Athens (Diogenes Laertius, *Lives* (hereinafter DL), VIII.86).

We do not know for sure the date of either the birth or the death of Eudoxus. Diogenes tells us that he died in his fifty-third year (i.e. aged fifty-two) and that his *acme* was in the 103rd Olympiad (360–4 BCE) (VIII.90). But this is not a helpful guide, not least because Diogenes' source, Apollodorus, elsewhere uses '*acme*' to mean the culminating period of a philosopher's thinking, which in the case of Anaximander may have been when he was 64 (II.2). A more common usage of the word seems to have indicated an age of about forty, but it is also a commonplace that mathematicians do their best work when young.

Though some suggest that Eudoxus was born between 395 and 390 BCE and, so, would have died between 343 and 337, a more consensual dating is that he was born in 408/9 BCE. Diogenes reports (VIII.86) that Eudoxus was twenty-three when he first visited Athens, and we shall suggest in the [next section](#) that he was around the Academy while Plato was composing the *Protagoras* in about 380. If so, we might hazard that he was born in 403 and so died around 350. If so, he was twenty-four years younger than Plato (427–347) and twenty-one years older than Aristotle (384–322). Such a speculation places him almost too neatly in a generation intermediate between Plato and Aristotle to be true. It may be true all the same, but nothing much hangs on it.

Young Eudoxus headed for Athens attracted by the fame of the 'Socratics' (VIII.86) and Diogenes names Archytas of Tarentum as his teacher in geometry (VIII.86; also Iambl., *In Nic. Arith.*, 10, 17), but it remains unclear where or when they might have met, though Archytas was an admired friend of Plato (DL, VIII.79–81). It is at least as likely that Eudoxus sought out not only Socrates' followers Xenophon and Antisthenes of Athens, but more particularly the mathematicians in the Academy such as Theaetetus, who worked on irrational numbers and should be credited with individuating the 'Platonic Solids', and Theodorus of Cyrene. After just two, presumably quite intense, months in Athens, Eudoxus returned home.

Though they do not agree on the sequence of his subsequent travels, our two main sources for Eudoxus' life, Diogenes Laertius and Flavius Philostratus (*Lives of the Sophists*, I.i), agree that he spent some considerable time in Egypt, specifically at Memphis, where he adopted the rather disquieting priestly custom of shaving not only his beard but also his eyebrows (DL VIII.87) as well as learning to read hieroglyphics (De Santillana 1940, esp. pp. 255–7; also Gwyn Griffiths 1965), so that Plutarch cites him as an authority on things Egyptian (*Is. et Os.*, 353 C, 359B, 372D, 377A). Closer to his home, at some point Eudoxus visited Mausolus (DL VIII.87), who was satrap at Halicarnassus and whose tomb gives us the word 'mausoleum'. Probably around the middle of the 370s, Eudoxus moved to the wealthy city of Cyzicus on the sea of Marmara, where he set himself to teaching (DL, VIII.88: *sophisteuon*), though quite what he taught and for how long, we do not know. But it seems to have been from here, and taking a band of his students with him, that Eudoxus returned to Athens at some point before about 367–6 BCE.

This *terminus ante quem* is justified by an admittedly late and anonymous life of Aristotle (Lasserre, T6a and T6b), according to which Eudoxus was present in the Academy when Aristotle arrived there. Given that Plato was away from Athens on one of his fruitless missions to Sicily in 367–5, the phrase '*tempore Eudoxi*' ('in the time of Eudoxus') in T6b has given rise to some speculation that Eudoxus had some role as stand-in scholarch (e.g. Merlan 1960, p. 100; Fermani 2008, p. 950 n. 43; and Zanatta 2008, pp. 8–10). Eudoxus' reputation may have been a factor in Aristotle's transfer to Athens, and he was, off (DL, VIII.87) and on (VIII.88), a friend and companion of Plato. But he does not figure in the standard list of Plato's pupils (III.46) and so was not a likely candidate for such a role. Being relatively young, more interested in mathematics than in philosophical speculation and not an Athenian citizen, he would have been an unsuitable legal representative of the school.

It is not given to us to know how long Eudoxus' second stay in Athens lasted. Most of the rest of the present *Element* is given over to insinuating that it was long enough for him to make quite an impact on Aristotle, not a man easily bowled over. While Diogenes tells us that Eudoxus returned to his native Cnidus, where he was esteemed and commissioned to frame a legal code for the city (VIII.88), an alternative story is that, from Athens, he went back to his school in Cyzicus (Cajori 1906, p. 32) and that the school itself kept going into the third century (Taub 1998, p. 452). These versions are, of course, compatible; but Eudoxus can have died in no more than one of the cities named. We know not which.

this letter was pretty certainly not Plato himself. Even if he does not appear by name, Eudoxus seems to have been on Plato's mind in one relatively early dialogue, the *Protagoras*, and one fairly late one, the *Philebus*. Our suggestion is that this timing may correspond to Eudoxus' two visits to Athens.

There are, incidentally, two key passages in the *Republic* with a hedonistic flavour. One is the claim that joy and harmless pleasures (*Resp.* II 357b6–7: *hēdonai ablabeis*; cf. *Tim.* 59d1) are unique in being desired only for themselves. The other is the polemic in books VIII and IX, in which cognates of 'pleasure' occur about sixty times as denoting a positive factor, and that leads to the mind-boggling conclusion that the well-ordered life of the ruler of the well-ordered state will be 729 times more pleasurable (*Resp.* IX 587e3: *hēdion*) than that of the tyrant at the dissolution of society. Though the former of these considerations is analogous to our *End*, the latter is part and parcel of Plato's soul-city analogy and has nothing to do with Eudoxus. But, from the thrashings meted out to Thrasymachus in *Republic* I and to Callicles in the *Gorgias* (494a–503d), each, in his own way, a proponent of untrammelled desire-satisfaction, we may safely say that Plato was at the very least very suspicious of hedonism as a doctrine.

We are allowed (Brandwood 1992, p. 112), but not required (Denyer 2008, p. 175), to suppose that Plato was composing the *Protagoras* around 380 BCE, the date we have already insinuated for Eudoxus' arrival in Athens. We do not know for sure what Plato's compositional habits were, but it is not wild to imagine that many of the voices we hear in the dialogues echo things that were said in discussions around the Academy. One of the themes in play was the possibility of there being a science (*technē*) of pleasure, with Plato's nephew Speusippus taking the view that there couldn't be, because pleasure is indeterminate (*aoristē*; cf. *EN* X, iii, 1173a17). Indeed, as we shall see in considering *Opposites*, Speusippus maintained the even stronger thesis that pleasure is not even a good. In any case, the lines of thought pursued in the *Protagoras* are a pretty sure sign that pleasure and the possibility of a science of pleasure were hot topics in the Academy, and it is hard to think that Eudoxus was not caught up in such debates.

Late in that dialogue, Socrates introduces the following notion (simplifying *Prt.* 365a3–5):

Measure If the good is pleasure and the bad is pain, and if pleasures and pains can be relatively greater or smaller, and more or less numerous, and of greater or lesser intensity, then we can use the measure of pleasure and pain to arrive at a measure of good and bad.

Socrates and Protagoras have already agreed that some pleasures are bad and some pains are good (*Prt.* 351c3–4), and Socrates is aiming to bring out the inconsistency in the popular combination of thoughts that pleasure is the good and that it is possible to fail to do what one thinks is better because one has been ‘overcome by pleasure’ (*Prt.* 355d5). As a result, many commentators have been puzzled that anything like *Measure* should have a role in the discussion. Indeed, Clerk Shaw thinks that Socrates ‘introduces hedonism without any apparent prompting’ (Shaw 2015, p. 1). So the hunt is on for a prompt. For instance, Julia Annas proposes that, with *Measure*, Protagoras is forced into accepting ‘a position in argument that he was unwilling to take on’ (Annas 1999, p. 170); conversely, Daniel Russell sees Protagoras as being offered ‘a friendly aid to his cause’ (Russell 2005, p. 248). The tension between these readings is so strong that it is attractive to think that Socrates’ talk of measuring and weighing is a matter of ‘analogies’ or ‘metaphors’ (Warren 2014, pp. 206–14).

An alternative way to relieve the tension would be to suggest that Plato was prompted to take *Measure* into consideration because it expresses a view arising from discussions of the themes treated in the *Protagoras*. Whether it was Plato who put it into play and thus inspired Eudoxus to take up and perhaps elaborate such a position, or it was Eudoxus who found Speusippus’ talk of the indeterminacy of pleasures perplexing, it may be attractive to attribute this textual quirk to ‘prompting’ external to the text (Davies 2017).

The thrust of *Measure* is that, if pleasure is measurable, and pleasure is the good, then the good is measurable. Earlier in the dialogue it was agreed that pleasure and the good are the same thing (*Prt.* 354c), so that the word ‘pleasure’ can take the place of the word ‘good’ (*Prt.* 355c). Socrates’ further proposal with *Measure* adds up to a quantitative version of hedonism. The quantities proposed are those of size, number and intensity, although the units to be adopted are not specified, nor how they might be integrated one with another, nor yet how they in turn map onto eventual measures of goodness.

Socrates’ first illustration of this thought is to liken the competent reckoner of pleasures to someone who knows how to establish relative weights with the use of scales (*Prt.* 356b1–2; cf. *Euthyph.* 7c). For this sort of operation, no units are necessary: we can just see where the preponderance is. Socrates seems to have in his sights the ways we can fail to use scales aright. What he questions is whether present and future pleasures and pains differ when considered purely as pleasures and pains (*Prt.* 356a8), and he supposes that his interlocutors will think not. If a future pleasure is as pleasant as a present one, then its being in the future should not make any difference to the use of the scales to ascertain its weight and therefore value. The parallelism here is with size and distance: the size of an item is not affected by how far away it is, although distant things will

appear to be smaller than nearby things of the same size. But someone who has skill in judging distances will not be deceived, as one who knows the value of certain pleasures will not be ‘dragged about like a slave’ (352c2) by those that happen to be at hand. Even if the evaluation he arrives at is mistaken, it is still the result of an effort at measuring the pleasures available. The mistake – and the ‘enslavement’ – arises out of an unjustified preference for what is to hand. A self-controlled hedonist like Eudoxus will thus not be enslaved.

A further complication is introduced at 356b5–6, where it is suggested that both pleasures and pains should be put in the pans of the scales. While Socrates begins with the idea that pleasures can be measured against each other, the addition of pains into the weighing process must mean that what are being weighed are not pleasures but something more like potential courses of action that are associated with certain nets of pleasure and pain. And, of course, it is possible for such associations to go awry and for the nets to be mistakenly assigned to less than optimal courses of action. Perhaps this is reflected in the unobjectionable locution that one ‘weighs one’s options’, and what are being weighed are already results of calculations – rather than weighings – by which pains are subtracted from pleasures. Yet a guide to decision-making need not require that pleasures and pains be measurable on a single scale, with pleasures counting positive and pains negative units.

Socrates then drops the idea of comparing weights and elaborates it, swiftly and rather allusively, with that of discounting irrelevant factors in reckoning quantities at a distance. Here he is picking up at least verbally the first of the factors set out in *Measure*: the ‘bigger’ or ‘greater’ (*meizō*) of *Prt.* 356a3 recurs at c5. In this latter passage, he likens the size of a pleasure to the way that an object will look larger if it is close up than if it is far away. Conversely, the moon looks the size of a sixpence, though it is very distant and the coin is in my hand. The example is not Socrates’, but it serves our purpose because the text is very cramped. Likewise, the notion of the intensity of a pleasure seems to be modelled by the way that a shout from afar may sound fainter than even a whisper in my ear. Again, the concrete case is supplied, because Socrates does not spell the analogy out, though perhaps he should have. Along with other cues, these optical and acoustic effects enable us to work out how we are placed relative to the things in our environment: if a sixpenny piece subtended the same angle to my eye irrespective of where it was placed relative to me, I would be quite at a loss to know how far away it is from me.

The analogies between the reckoning of the spatial extents of such things as the moon and the sixpence, and the estimates of pleasures and pains, may have a certain intuitive appeal, but, as in the case of the scales, Socrates’ gestures at them carry with them some further oddities.

Seminari d'Història de les Ciències
Universitat Autònoma de Barcelona

GALILEO GALILEI

La nueva ciencia del movimiento

Selección de los *Discorsi*, con introducción,
traducción, notas y apéndices a cargo de

Carmen Azcárate
Manuel García Doncel
José Romo

Publicacions de la
Universitat Autònoma de Barcelona

Edicions de la
Universitat Politècnica de Catalunya

Bellaterra, 1988

This One



JZSS-L4K-L51F

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

GALILEI, Galileo

[Discorsi. Castellà. Seleccions]

La nueva ciencia del movimiento. — (Clásicos de las ciencias ; 1)
Acompanyat de reproducció fragmentària facsimil de la 1^a ed.,
Leida : Elsevirii, 1638.
ISBN 84-7488-283-4 (obra completa)

I. AZCÁRATE, Carmen

II. GARCÍA DONCEL, Manuel

III. ROMO, José

IV. UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA. Servei de
Publicacions (Bellaterra)

VI. UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

VII. col·lecció

1. Galilei, Galileo. Discorsi

2. Cinemàtica - Obres anteriors a 1800

3. Física - Història - S. XVII

53 Galilei, Galileo

531.1 "16"

Editen:



Servei de Publicacions
de la Universitat Autònoma de Barcelona
08193 Bellaterra (Barcelona)



Edicions de la
Universitat Politècnica de Catalunya
Av. Diagonal, 647. 08028 Barcelona

Imprimeix:

Universitat Autònoma de Barcelona

Dipòsit Legal: B. 966-1988

ISBN: 84-7488-282-6

ISBN: 84-7488-283-4 Obra completa

Printed in Spain

APÉNDICE 3

TEORIA EUCLIDIANA DE LAS PROPORCIONES

Como ya anunciábamos en la Introducción, el método matemático utilizado por Galileo en *La nueva ciencia del movimiento* es la teoría de proporciones y su aplicación geométrica, expuestas en los libros 5 y 6 de *Los Elementos* de Euclides. Es digna de mención la admiración de Galileo por la obra del antiguo matemático de Alejandría, uno de los pocos autores clásicos que cita junto con Arquímedes y Apolonio.

En la época en que los nuevos métodos algebraicos florecen con toda su potencia en toda Europa,¹ y en que nace la geometría analítica,² resulta sorprendente que un hombre tan innovador como Galileo se mantenga fiel a las matemáticas griegas del siglo III a.C., matemáticas que, sin duda, maneja magistralmente con toda su riqueza y rigor.

1. La noción de proporción en Euclides y sus orígenes

Es sabido que una de las tesis fundamentales de los pitagóricos (siglo VI a.C.) era que se podía explicar la esencia de las cosas, tanto de las geométricas como de las prácticas y teóricas de la vida humana, en términos de *arithmos* («número»), o sea por las propiedades intrínsecas de los números naturales y de sus razones. El descubrimiento de las magnitudes inconmensurables, como son la diagonal de un cuadrado o de un cubo y su lado o arista, había provocado una auténtica crisis en el seno de la matemática ya que invalidaban la mayoría de los teoremas que implicaban proporciones. Eudoxo de Cnido (408?-355? a.C.) fue el primero en dar una nueva definición de razón y una teoría de proporciones válida también para magnitudes inconmensurables. Eudoxo es reconocido como el gran matemático de la era helénica, pero todas sus obras se han perdido y se le conoce únicamente a través de las citas de sus seguidores entre los cuales los más destacados son, sin duda, Euclides y Arquímedes.

Si nos remontamos a la época anterior a Eudoxo, nos encontramos con el término vago de «razón» que designa una relación cuantitativa entre dos magnitudes homogéneas. En cuanto a la noción de proporción, los griegos usaban un concepto según el cual cuatro cantidades forman una proporción (para nosotros $a/b = c/d$) si las dos razones tienen la misma sustracción recíproca, esto es si en cada una de las dos razones la cantidad menor (b y d , por ejemplo) se puede restar de la mayor (a y c) un mismo número entero de veces (n) y en cada caso el resto (r y s) se puede sustraer de la cantidad menor (b y d) un mismo número entero de veces (n'), pudiéndose sustraer el nuevo resto (r' y s') del resto anterior el mismo número de veces (n''), y así sucesivamente hasta llegar a un resto nulo. En nuestra notación :

$$\begin{aligned} a - n \cdot b = r < b, \quad b - n' \cdot r = r' < r, \quad r - n'' \cdot r' = r'' < r', \dots \\ c - n \cdot d = s < d, \quad d - n' \cdot s = s' < s, \quad s - n'' \cdot s' = s'' < s', \dots \end{aligned} \quad \text{E1}$$

Es evidente que se trata de una definición operativa poco manejable en general y que para magnitudes inconmensurables conduce a un proceso interminable.

1. Recordemos a Nicolàs CHUQUET, *Triparty en la science des nombres*, Lyon 1484; Gerolamo CARDANO, *Artis Magnae, sive de regulis algebraicis*, Nuremberg 1545; Niccolò TARTAGLIA, *Quesiti et inventioni diverse*, Venecia 1554; Rafael BOMBELLI, *L'Algebra, parte maggiore della aritmetica*, Bolonia 1572; François VIETE, *Canon Mathematicus*, Paris 1579; Simon STEVIN, *La aritmetica*, Leyden 1585 (véase MALET+PARADÍS-1984).

2. Véase DESCARTES-1637.

$$\begin{aligned}
 \frac{a_0}{a_1} &= \frac{b_0}{b_1}, \\
 \frac{a_1}{a_2} &= \frac{b_1}{b_2}, \\
 &\dots \\
 \frac{a_{n-1}}{a_n} &= \frac{b_{n-1}}{b_n},
 \end{aligned}
 \tag{E6}$$

de la que resulta la proporción (allí llamada razón)

$$\frac{a_0}{a_n} = \frac{b_0}{b_n}.
 \tag{E7}$$

Nosotros obtenemos de E7 de E6 por producto y simplificación, lo cual equivale a lo que dice Euclides de escribir las magnitudes extremas suprimiendo las medias. Galileo llama a esta propiedad *ex aequali* (traducción de la expresión de Euclides *perí isos*) que nosotros traducimos «por equiparación».¹³

La proposición 7 enuncia la propiedad trivial

$$a = b \iff \frac{a}{c} = \frac{b}{c} \iff \frac{c}{a} = \frac{c}{b},
 \tag{E8}$$

que Galileo utiliza también en sus operaciones con proporciones.¹⁴

La Proposición 11 enuncia lo que nosotros llamamos la propiedad transitiva de la igualdad de razones

$$\left. \begin{aligned} \frac{a}{b} &= \frac{c}{d} \\ \frac{c}{d} &= \frac{e}{f} \end{aligned} \right\} \implies \frac{a}{b} = \frac{e}{f},
 \tag{E9}$$

que es también utilizada por Galileo.¹⁵

3. La teoría de las proporciones en la geometría del Libro 6.

En el Libro 6, que consta de 3 definiciones y de 33 proposiciones, Euclides aplica la teoría de las proporciones para demostrar los teoremas de razones y proporciones en las figuras geométricas planas como son los triángulos y los paralelogramos. Mencionamos tres de estas proposiciones utilizadas por Galileo:¹⁶

13. Véase [E12] a [E14], p. 79 de esta edición.

14. Véase [E50] y [E51], p. 91 de esta edición.

15. Véase [E48] a [E50], p. 90 de esta edición.

16. EUCLIDES-*Elementos*, p. 200.

PROPOSICIONES

...

4. En triángulos equiángulos, los lados adyacentes a los ángulos iguales son proporcionales y los que subtienden los ángulos iguales son homólogos.

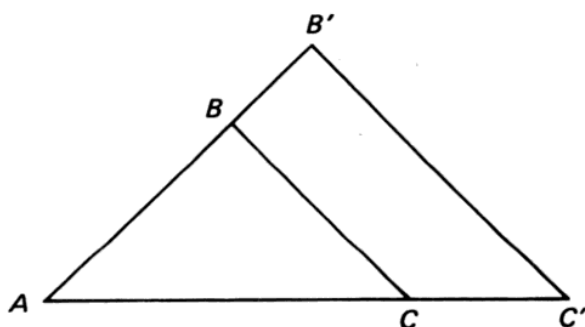
...

8. Si en un triángulo rectángulo se traza una perpendicular desde el ángulo recto al lado opuesto, los triángulos contiguos a la perpendicular son semejantes al triángulo inicial y semejantes entre sí.

...

23. Los paralelogramos equiángulos tienen entre sí una razón compuesta de las razones de sus lados.

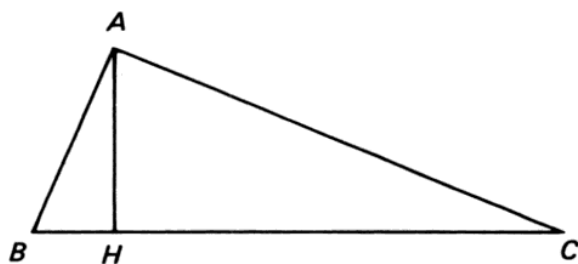
La Proposición 4 enuncia la propiedad básica de los triángulos semejantes



$$\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'} = \frac{BC}{B'C'} \quad \text{E10}$$

que Galileo utiliza varias veces en sus demostraciones geométricas.¹⁷

La Proposición 8 enuncia la semejanza de los tres triángulos rectángulos:



$ABC,$
 $HBA,$
 $HAC.$

De ella se deducen fácilmente los conocidos teoremas del triángulo rectángulo llamados Teorema de la altura:

$$AH^2 = BH \cdot HC \quad \text{E11}$$

Teorema del cateto:

$$\begin{aligned} AB^2 &= BH \cdot BC \\ AC^2 &= CH \cdot CB \end{aligned} \quad \text{E12}$$

Teorema de Pitágoras:

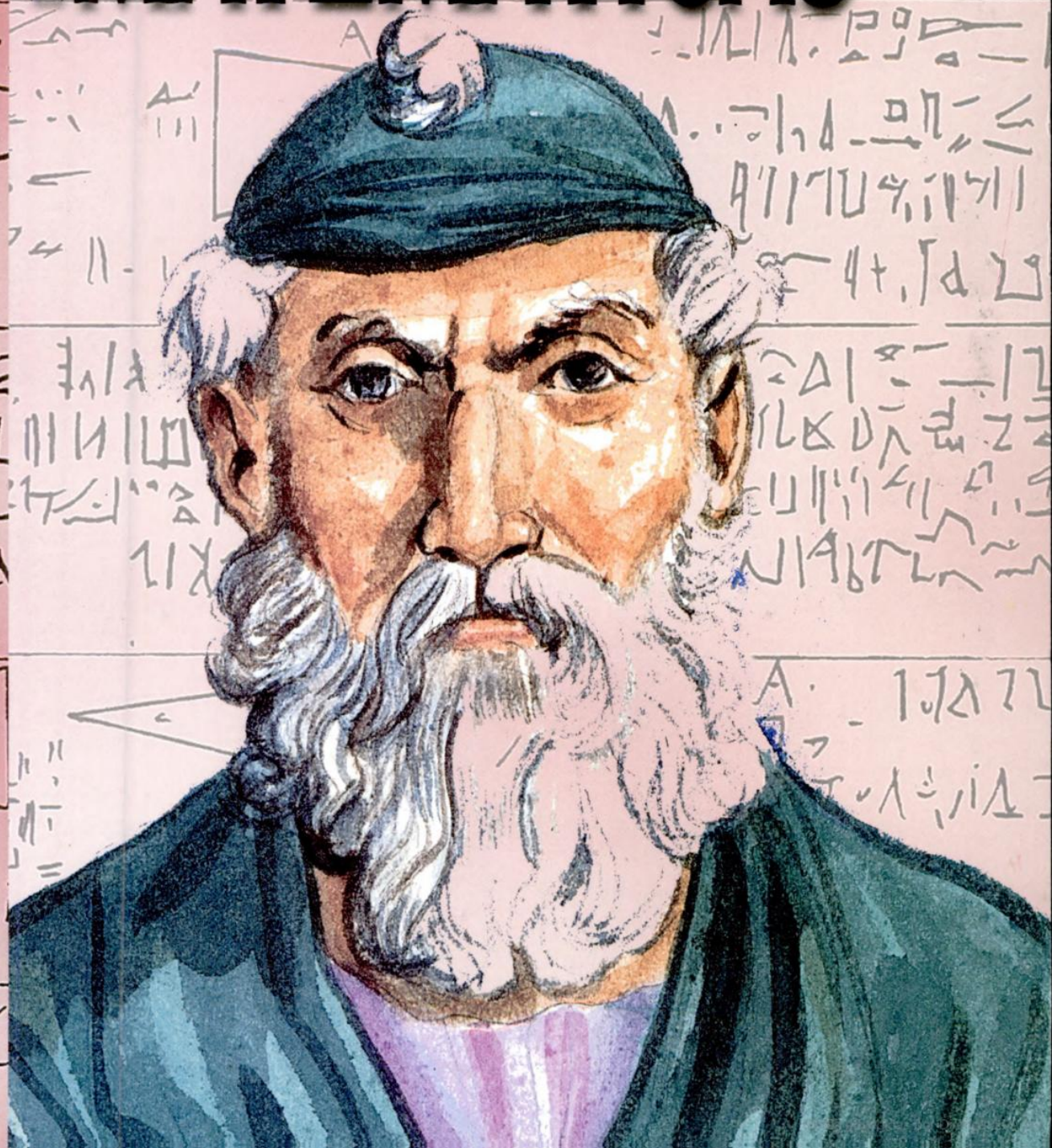
$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \quad \text{E13}$$

17. Véase [E6], p. 69 de esta edición.

Ángel Ruiz

Historia y filosofía

DE LAS MATEMÁTICAS



Ángel Ruiz

HISTORIA Y FILOSOFÍA DE LAS MATEMÁTICAS



EDITORIAL UNIVERSIDAD ESTATAL A DISTANCIA

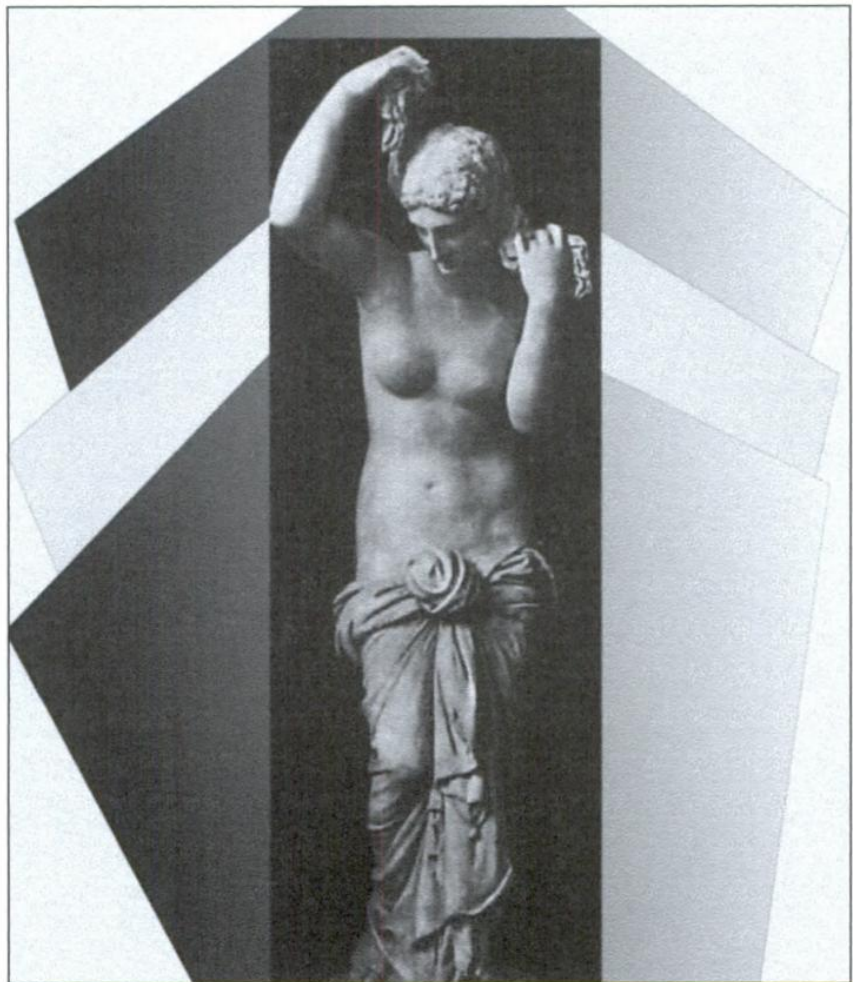
This One



L8DS-BGT-OU9J

Capítulo 3

ATENAS



las ideas puras; las matemáticas resultaban un instrumento pedagógico esencial para la mente, permitía potenciar el razonamiento abstracto necesario para comprender las formas. Esto es relevante.

La colocación de las matemáticas en esta posición privilegiada en la actividad científica fue un factor que extendió la influencia pitagórica en torno a las matemáticas griegas y, eventualmente, contribuiría al papel jugado por las matemáticas en la ciencia moderna.

◆ EUDOXO DE CNIDO

Eudoxo fue el principal matemático de la *Academia* de Platón. No sólo se dedicó a las matemáticas sino también a la ciencia en general. Algunos piensan que la estimación de Aristóteles de que la circunferencia de la Tierra era unos 400 000 estadios (40 000 millas) se debía a Eudoxo. Se afirma que fue el mejor de los matemáticos del periodo clásico y sólo superado por Arquímedes en toda la Antigüedad. Su contribución más importante a las matemáticas fue la llamada teoría de las proporciones. El objetivo de esta teoría fue evitar el uso de los irracionales como números sin dejar de hacer geometría.

Eudoxo siguió la tradición pitagórica de la exclusión de los inconmensurables.

Lo que hizo fue, en esencia, introducir la noción de magnitud, que no era un número pero servía para tratar ángulos, segmentos, áreas, volúmenes, que variaban de una manera continua. Mientras que los números eran discretos, se podía pasar de uno a otro, las magnitudes eran continuas. Las magnitudes, por definición, no podían tener valores cuantitativos. Para Eudoxo, una razón de magnitudes era una proporción, es decir una identidad de dos razones fueran conmensurables o no. Tanto el concepto de razón como de proporción sólo tenían sentido en la geometría, no en la aritmética, porque no trataba de números.

Esta teoría abría posibilidades de trabajo en la geometría sobrepasando los aspectos críticos e “inaceptables” de los irracionales. Sin embargo, como comentaremos luego, generaron serias limitaciones a las matemáticas griegas. Por ejemplo, en primer lugar, redujo el uso de los irracionales sólo a la geometría.

Sobrevaloró históricamente el campo de la geometría, durante siglos, la que se afirmó teórica e incluso filosóficamente como la única disciplina matemática capaz de tener un fundamento lógico riguroso.

Para Bell:

La teoría eudoxiana de la proporción dio validez indirectamente a la regla empírica de los egipcios para el volumen de un tronco de pirámide y completó el trabajo de los pitagóricos sobre los números similares. Certificó también el método del “agotamiento” y, después de Dedekind (1872), el uso del cálculo integral en la determinación de lon-

gitudes, áreas y volúmenes. En resumen, proporcionó una base para el sistema de los números reales de análisis matemático [Bell, E.T.: *Historia de las matemáticas*, p. 74].

Es curioso mencionar que, aunque Eudoxo seguía la tradición de Pitágoras, la teoría de las proporciones creaba un énfasis en las matemáticas griegas: un giro hacia la geometría y no hacia la aritmética y los números, que, recuérdese, para los pitagóricos eran el componente fundamental de la realidad. Hay un cambio radical.

Una segunda consecuencia de esta seria separación entre geometría y aritmética, con privilegio de la primera, fue el debilitamiento de la aritmética y el álgebra en el mundo griego. Todas aquellas situaciones aritméticas o algebraicas que generaran irracionales eran convertidas en problemas geométricos.

En la Grecia clásica, con un distanciamiento de lo empírico, lo práctico, de la inducción, la experimentación, y con el predominio de visiones que afirmaban a las matemáticas como parte de un mundo ideal, alejado del entorno, se dio, consecuentemente, una separación entre las matemáticas y los requerimientos prácticos en el comercio o la agrimensura. Las matemáticas perdieron una motivación social para el desarrollo de la aritmética y el álgebra.

Debe decirse, sin embargo, como un elemento histórico y cultural fundamental, que esta separación tendería a desaparecer o por lo menos a disminuir en el periodo alejandrino, que colocó en otra perspectiva el conocimiento cuantitativo, las artes y las técnicas, la vida práctica, y por lo tanto el desarrollo del álgebra y la aritmética.

Eudoxo fue creador del famoso método de exhaustión, que luego sería utilizado ampliamente por Arquímedes. Fue el mismo Arquímedes quien atribuyó el origen de este método a Eudoxo. Los matemáticos previos a Eudoxo de Cnido (alrededor de 408-355 a.C.) sabían que era posible inscribir y circunscribir figuras rectilíneas a una curvilínea y aumentar el número de lados o caras indefinidamente. Pero, precisamente, ahí estaba el problema: *el infinito*.

Se reconoce que Eudoxo al introducir las magnitudes, como un mecanismo para poder utilizar inconmensurables en la geometría, tuvo que subrayar la importancia de la deducción a partir de axiomas explícitos. Es decir, manipular razones inconmensurables era un asunto muy delicado desde el punto de vista lógico, y obligaba a precisiones y a un manejo deductivo muy cuidadoso. Esto indicaría que los trabajos de Eudoxo debieron ejercer una influencia decisiva en una obra clásica que afirmó la axiomática y el método deductivo en las matemáticas: los *Elementos* de Euclides.

Ahora bien, en lo que se refiere a la cosmología, ofreció una teoría planetaria: la de las “esferas homocéntricas”, basada en estos cuerpos geométricos. Se suele valorar como la primera teoría planetaria propiamente. Ya volveremos sobre esto.

También se debería citar en este contexto a Menecmo (375-325 a.C.), quien formó parte de la escuela de Eudoxo e, incluso, se sabe, que fue preceptor de Alejandro el Grande. Es el

primero en ocuparse de las secciones cónicas, usando tres tipos de conos: de ángulo recto, obtuso y agudo, cortando cada uno por un plano perpendicular a un elemento. En aquel momento, sólo una rama de la hipérbola era aceptada.

◆ ARISTÓTELES

El más distinguido discípulo que tuvo la *Academia* de Platón fue Aristóteles, pero se convirtió en el más importante crítico de la doctrina platónica de las formas así como de sus ideas en relación con las matemáticas. Como Sócrates y Platón, Aristóteles afirmó la importancia del razonamiento correcto en la obtención de conocimiento verdadero. Sin embargo, a diferencia de sus predecesores, reemplazó la dialéctica con una lógica silogística (aquella que obtiene conclusiones a partir de postulados asumidos), y esto se convirtió en el corazón del método deductivo desarrollado por Aristóteles.

¿Cómo era su ciencia? Cualitativa, fuertemente enraizada en el sentido común y donde la presencia de las matemáticas era muy reducida. Igualmente importante, Aristóteles distinguía entre los planos terrestres y celestiales. El segundo plano no podía ser aprehendido por la experiencia humana; el primero se podía organizar en un sistema que incluía todo el conocimiento desde la biología y psicología, hasta la política y la metafísica. De hecho, y a manera de ejemplo, en el terreno de la historia natural es donde hizo muchos de sus mejores aportes, ofreciendo una clasificación y estudio de animales y plantas, y también hizo estudios de embriología. Se dice que es el creador de la anatomía comparada y el iniciador de una clasificación a partir de las estructuras de los seres vivos. Por ejemplo, distinguía entre animales con sangre y aquellos sin sangre. Los primeros se subdividían en mamíferos, reptiles, aves y peces.

Nacido en Estagira, Macedonia, Aristóteles (384-322 a.C.) fue discípulo de Platón en la *Academia* durante más de 20 años, y luego fundó su propia escuela: el *Liceo*.

Es bastante conocido que entre el 343 y 340 a.C. fue tutor de Alejandro el Grande, quien establecería una nueva época en la civilización griega.

Su producción escrita, realizada y consignada de una manera extraordinariamente sistemática, incluye física, lógica, política, filosofía, meteorología, botánica, psicología, lógica, economía, aunque, sin embargo, no incluye prácticamente matemáticas.

A diferencia de Platón, Aristóteles no consideraba que hubiera un mundo de “formas” o ideas independientes que constituyera la realidad. Sí creía en lo que suele llamarse “universales”, como la dureza, rojez, amarillez, anchura, esfericidad, que él creía características de los objetos reales: los universales no podían vivir en sí mismos al margen de los objetos de la realidad.

Para Aristóteles, los números y las formas geométricas también son propiedades de los objetos reales y se accede a ellos a través de la abstracción y la generalización. ¿Qué son, en-

tonces, las matemáticas para Aristóteles? Básicamente, refieren a conceptos abstractos derivados de propiedades de los objetos del mundo físico.

Es interesante que Aristóteles posee una visión de la “definición” que se considera bastante moderna, básicamente como un nombre para un conjunto de palabras, y que debe darse en términos de algo previo a lo que se pretende definir. Por eso mismo, afirma la necesidad de la existencia de términos indefinidos. También es relevante la distinción entre el significado de algo y su existencia. El mecanismo para probar la existencia de un ente sería, para Aristóteles, la construcción a través de regla y compás. Es el método que también asumiría Euclides y casi todo el mundo griego.

En relación con la estructura lógica de las matemáticas, Aristóteles separó los axiomas y las nociones comunes de los postulados: los primeros aplicables a todas las ciencias y los postulados sólo a una ciencia cualquiera. Los postulados no requieren ser autoevidentes, aunque se necesita afirmar su verdad a través de las consecuencias que se deriven de ellos. Los axiomas, según Aristóteles, se obtienen de la observación de los objetos del mundo físico.

Hay otros asuntos acerca de las matemáticas que pueden mencionarse: Aristóteles establece una diferencia cualitativa entre el punto y la recta, que refiere directamente a la distinción entre lo discreto y lo continuo. Lo primero apunta a la aritmética y lo segundo a la geometría.

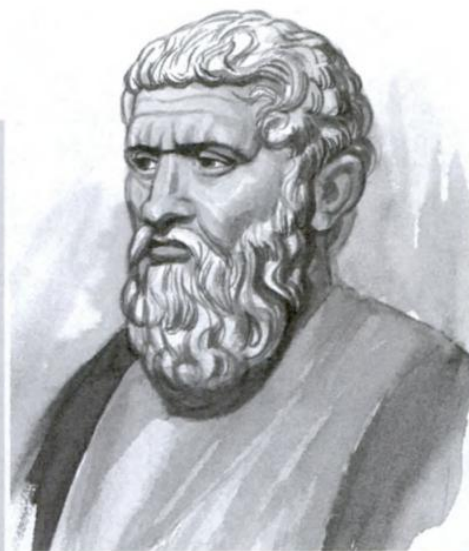
Es interesante que Aristóteles considera que la aritmética es previa a la geometría y, además, que la aritmética es más precisa.

Otra distinción aristotélica es sobre el infinito: admite sólo el potencial.

Uno de los principales logros de Aristóteles se dio en la lógica. Sistematizó las reglas para el razonamiento lógico correcto, como la ley del tercero excluido, la ley de la contradicción, etc., a partir, sin duda, de las matemáticas que se habían producido en el mundo griego hasta ese momento.

Aristóteles enfatizaba la deducción en la prueba matemática, es decir el establecimiento de la verdad de las proposiciones matemáticas. Aquí hay una diferencia con Platón, para quien la prueba es secundaria, porque lo principal es una relación directa, intuitiva racionalmente, con un mundo ideal de formas fuera de la realidad física.

Ya volveremos sobre estos temas. Ahora vamos a ir a dos de los principales exponentes de las matemáticas del periodo clásico: Euclides y Apolonio.



PLATÓN nació alrededor del año 427 a.C. en Atenas, Grecia. Se dice que su nombre original fue Aristocles y Platón su sobrenombre. Platón fue el hijo menor de Aristón y Perictione, ambos provenían de familias adineradas. Cuando era muy joven, su padre murió y su madre se volvió a casar con Pirilampes. Aparentemente fue alumno de Crátilo, que era estudiante de Heracleito.

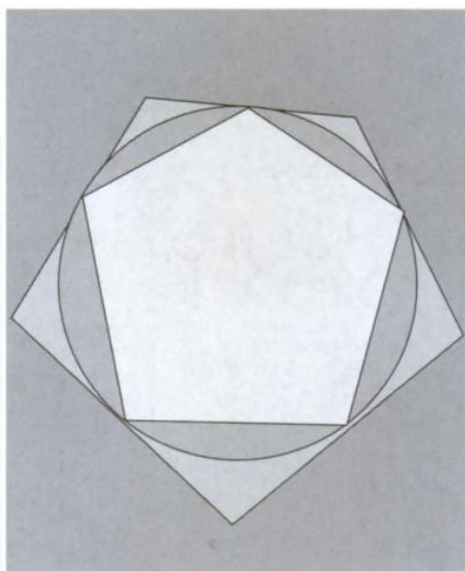
Fue amigo muy cercano a Sócrates.

Platón fue parte del servicio del ejército en la Guerra del Peloponeso, conflicto entre Atenas y Esparta durante los años 431 a.C. al 404 a.C., aunque, en realidad, lo que deseaba era una carrera política antes que militar. Cuando la guerra terminó, se unió a la oligarquía de los Treinta Tiranos en Atenas, pero sus actos eran tan violentos que Platón los abandonó rápidamente.

En el 399 a.C., Sócrates murió, envenenado con cicuta, lo que produjo que Platón decidiera no formar parte de los procesos políticos en Atenas.

Después, Platón viajó a Egipto, Sicilia e Italia. En Egipto conoció el reloj de agua y lo introdujo en Grecia. En Italia aprendió del trabajo de Pitágoras y apreció las matemáticas. En su regreso a Atenas, aproximadamente en el año 387 a.C., fundó la Academia, una escuela que se dedicó a la enseñanza de las ciencias y la filosofía, fue cerrada en el año 529 a.C., por el Emperador Cristiano Justiniano.

Murió alrededor del año 347 a.C. en Atenas, Grecia.



EUDOXO nació en el año 408 a.C. en Cnido (ahora Turquía). Hijo de Aischines. Propuso la primera explicación sistemática de los movimientos del sol, la luna, y los planetas. Viajó a Tarento (en Italia), donde estudió con Arquitas, seguidor de Pitágoras. Arquitas le motivó el interés hacia el problema de duplicar el cubo, además de la teoría de números y la música. Visitó Sicilia, donde estudió medicina con Filistón.

Después de salir de Atenas se fue a Egipto a estudiar astronomía y luego viajó a Cízico en Asia Menor, en donde estableció una escuela que fue muy popular y tenía muchos seguidores. Regresó a Atenas acompañado por varios seguidores.

Se cree que la relación que tuvo con Platón fue de poco respeto en lo que se refiere a las capacidades analíticas de este último, y es probable que no existiera mutua influencia entre las ideas de ambos.

Construyó un observatorio en Cnido y de allí observó la estrella Canopus. Aparte de su contribución a las matemáticas Eudoxo también escribió un libro de geografía que, aunque perdido, se conoce bastante de él por diferentes citas de varias fuentes. En él citaba aspectos políticos, historia y territorio. Además, escribió acerca de Egipto y su religión.

Murió en el año 355 a.C. en Cnido, Asia Menor.

SÍNTESIS, ANÁLISIS, INVESTIGACIÓN

1. Investigue las ideas y aportes intelectuales que –se supone– propuso Jenófanes. Escriba un documento de aproximadamente una página de extensión.
2. Investigue: ¿qué fueron las “guerras Médicas”? Describalas en un par de páginas. Use bibliografía adicional.
3. Mason hace un resumen del escenario histórico e intelectual en que se movía Atenas. Estudie el texto siguiente.

Atenas no floreció en época tan temprana como las ciudades griegas de Jonia y de la Italia meridional, si bien su cultura resultó ser más estable y duradera. Las ciudades jonias fueron subyugadas por Persia en el 530 a.C., resultando Mileto completamente destruida unos cuantos años más tarde. Atenas se benefició indirectamente del eclipse de los jonios, ya que cayó en sus manos el comercio con las colonias griegas de la costa del mar Negro. Políticamente Atenas detentaba el mando de las ciudades griegas contra los persas, quienes resultaron derrotados en tierra el año 490 a.C., en Maratón, y en el mar diez años después. Las artes florecieron en Atenas, especialmente desde los tiempos de Solón, c. 639-559 a.C., quien decretó, según Plutarco, que un hijo no tenía por qué sostener a su padre a menos que éste le hubiese enseñado un oficio. Esta fue la época en que, según se dice, vivieron los inventores griegos; personas como Anarcarsis el Escita, a quien se atribuye la invención de los fuelles y la mejora del ancla y de la rueda de alfarero, o como Teodoro de Sarrios a quien se atribuye la invención del nivel, el cartabón, el torno, la regla y la llave. Era además una época en la que la palabra griega “sofía” aún significaba habilidad técnica y no sabiduría intelectual. Tras la victoria sobre los persas, Atenas inició su período de prosperidad y grandeza [Mason, Stephen: *Historia de las Ciencias 1. La Ciencia Antigua, la Ciencia en Oriente y en la Europa Medieval*, pp. 40-41].

Explique la relación entre progreso ateniense y descenso jonio.

4. Investigue y consigne por escrito quién era y cuáles fueron los logros principales de Pericles.
5. Investigue y explique qué fueron las Guerras del Peloponeso.
6. Explique las posiciones de Sócrates y los sofistas en relación con el conocimiento.
7. ¿Qué es el método *analítico* que se atribuye a Platón?
8. Explique la importancia de Platón en la definición de los límites y métodos de las matemáticas.
9. ¿Por qué Platón escogió la esfera y el círculo como las figuras claves de la astronomía?

10. ¿Cuál era el objetivo esencial de la teoría de las magnitudes desarrollada por Eudoxo?
11. ¿Cuál era el mecanismo, según Aristóteles, para asegurar la existencia de un ente en matemáticas?
12. Explique la diferencia entre axiomas y postulados, según Aristóteles.
13. ¿Qué quiere decir infinito potencial? Explique.
14. Lea cuidadosamente el siguiente texto.

Estos criterios de tipo matemático-estético van a traer consigo la adopción de compromisos muy precisos, que influirán decisivamente en el desarrollo de la astronomía desde el siglo IV a.C. hasta el siglo XVII. Resumidamente pueden ser expresados como sigue:

1. Tanto los cuerpos celestes como la Tierra tienen forma de esfera (hay también argumentos empíricos a favor de la esfericidad de la Tierra que se expondrán en otro momento).
2. El cosmos tiene forma esférica y, por tanto, es finito.
3. La esfera de la Tierra se halla en el centro de la esfera cósmica.
4. Todos los movimientos celestes son circulares.
5. La velocidad angular (el término es moderno) de los cuerpos celestes es invariable (algunos autores niegan en la actualidad que Platón formulara explícitamente este requisito).
5. El sentido de los movimientos circulares planetarios es siempre el mismo; no hay inversiones de sentido.

A partir de Platón la astronomía se moverá dentro de los límites que marcan estas proposiciones. Para romperlos será preciso aguardar al heliocentrismo de Copérnico, a las leyes de Kepler, a la ley de inercia de Descartes y Newton. La esfera y el círculo perderán su posición privilegiada, pero lo que no desaparecerá es la extraordinaria importancia de la geometría, o mejor, de la matemática en general en la explicación de la Naturaleza. Muy al contrario su aplicabilidad se extenderá con Galileo del Cielo a la Tierra, abarcando un ámbito de fenómenos que habían sido excluidos por Platón de la posibilidad de matematización [Rioja, Ana y Ordóñez, Javier: *Teorías del universo. Volumen I. De los pitagóricos a Galileo*, pp. 35-36].

Exprese en sus palabras las consecuencias de adoptar el círculo y la esfera en la explicación cosmológica. ¿Por qué piensa usted que Platón privilegió esas figuras?

15. El siguiente pasaje de la novela de Alfredo Marcos nos retrata al personaje Eudoxo.

La Academia había sido encomendada por Platón a Eudoxo Cnido, quien se había unido a la escuela junto con algunos discípulos suyos de Cízico. Eudoxo era enton-

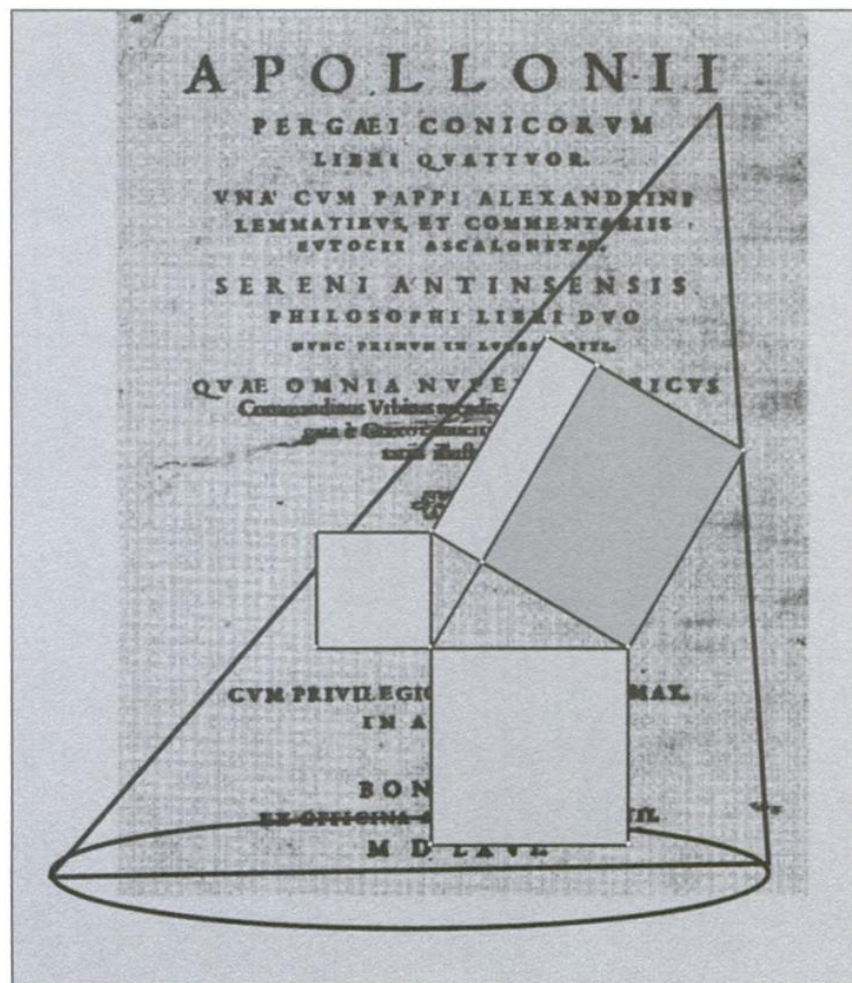
ces un hombre joven, en poco sobrepasaba los treinta, pero ya tenía reputación, de estudioso en muchas materias, de sabio en varias, de honrado y de gran conocedor del mundo. Había aprendido números y música con el mismo Arquitas de Tarento, medicina con Filistón y filosofía con Platón, y había vivido más de un año en Heliópolis, entre los sacerdotes astrónomos de Egipto, a cuyo país llegó como embajador de Esparta. Podía hablar con conocimiento sobre cosmología, meteorología o teología, pero sus lecciones de matemáticas, astronomía y geografía eran las más seguidas. Su discurso era ameno y con frecuencia nos transportaba a tierras lejanas. Hablaba con preferencia de Sicilia y de Egipto, de las costumbres de los pitagóricos de Tárenlo o de las gentes del Nilo.

Pero también tenía conocimiento de muchas partes de Grecia, de la península Itálica y del Asia, y no sólo de las tierras y las aguas, sino también de las formas de vida de los hombres.

Eudoxo había puesto escuela en Cízico, pero, debido a la proximidad de los persas, nunca se sintió allí seguro, lo que le llevó a mantener siempre un hilo de conexión con Atenas, y a buscar a veces refugio para él y los suyos en esta ciudad. Por otra parte, a Platón le agradaba que sus discípulos pudiesen oír a los más sabios. En la Academia hablaron filósofos y geómetras, como es bien sabido, pero también astrónomos, geógrafos, físicos y médicos. Platón pensaba que aquellos jóvenes destinados a regir la ciudad debían formarse en los más sólidos saberes, y no sólo en el arte de la retórica. Los platónicos acostumbraban a reunirse en los jardines dedicados al héroe Academo, junto al río Cefiso, al norte de la ciudad, ya fuera de la muralla. Este paraje ha sido cuidado desde antaño como lugar de paseo; los atenienses lo han embellecido con árboles, estatuas, palestras y altares al menos desde tiempos de Címon [Marcos, Alfredo: *El testamento de Aristóteles, memorias desde el exilio*, pp. 144-145].

Describa el escenario social que constituía la *Academia* de Platón. Resuma la personalidad de Eudoxo, según este autor.

EUCLIDES Y APOLONIO



Alejandro en Egipto reemplazó a Atenas como el centro de la ciencia. Este cambio fue facilitado por los mismos gobernantes ptolomeos de Egipto.

Se afirma que en Alejandría se alcanzó la época dorada de la geometría. Tanto los *Elementos* de Euclides como las *Secciones Cónicas* de Apolonio se desarrollaron allí. Incluso la ciencia desarrollada fuera de Alejandría, como fue la geometría y la mecánica de Arquímedes, fueron producto de hombres que estudiaron o estuvieron influenciados por lo que se desarrollaba en Alejandría. De igual manera, en la astronomía fue relevante Alejandría: por ejemplo, con Aristarco de Samos que estableció una visión heliocéntrica del universo y, por supuesto, ya en el siglo II d.C., con Ptolomeo.

◆ EUCLIDES

Euclides nació alrededor del año 325 a.C. en Alejandría, Egipto. Fue uno de los más prominentes matemáticos de la Edad Antigua. Su vida se conoce muy poco. Enseñó matemáticas la mayor parte de su vida en Alejandría y fue en esta ciudad donde fundó su escuela. Al no conocerse mucho de su vida, ha habido diferentes opiniones acerca de él; autores árabes creen que era hijo de Náucrates y que nació en Tiro. Otros insisten en que Euclides no era más que un ser ficticio y que se le han atribuido muchos tratados que no le corresponden. En lo que concuerdan diferentes autores es que era un hombre justo y dispuesto a que las matemáticas avanzaran en cualquier circunstancia. Murió aproximadamente en el año 265 a.C. en Alejandría.



ILUSTRACIÓN 15. Euclides

La formación de Euclides estuvo asociada a la *Academia* de Platón, y esto es un punto de referencia esencial para entender la naturaleza y los límites de su obra matemática.

Es interesante que tanto Euclides como Apolonio (todos los expertos consideran su trabajo fundamental en las *Secciones Cónicas*, esencialmente por su método, como parte del período clásico) serían considerados paradigmas de las matemáticas clásicas griegas, y sin embargo vivieran en la época cronológica alejandrina.

Esto de las relaciones genéticas y las influencias entre los diferentes intelectuales griegos es un asunto muy interesante. Thales fue maestro de Pitágoras. Existió una relación entre los pitagóricos y Zenón y Parménides. Los pitagóricos ejercieron la suya sobre Platón, que a su vez fue maestro de Aristóteles. Eudoxo fue influenciado por las ideas de Platón directamente en la *Academia*. Euclides se educó en la *Academia* de Platón y varios discípulos de Euclides, luego, ejercieron su influencia sobre Apolonio.

Esto hace referencia a los métodos de la construcción del conocimiento, tanto de sus contenidos, como de su naturaleza y fronteras: hay lazos, puentes, conexiones como en toda actividad humana. No es un mundo abstracto absoluto infalible, impoluto, al que se llega por vías solo racionales, protagoniza y concurre lo social y lo histórico con todas sus poderosas propiedades.

La relación de Euclides con los platónicos ha sido firmemente establecida: en los *Elementos*, según Proclus, Euclides incluyó varios resultados de Eudoxo, así como de Teeteto, vinculados a la *Academia*.

Todos los escritos que tenemos de Euclides han tenido que ser reconstruidos a partir de recensiones, comentarios, críticas u observaciones de otros escritores.

• Los *Elementos*

Euclides y los *Elementos* son referencias inseparables.

Bien dice Sarton: “Euclides es como Homero; así como todo el mundo conoce la *Ilíada* y la *Odisea*, del mismo modo todo el mundo conoce los *Elementos*. ¿Quién es Homero? El autor de la *Ilíada*. ¿Y Euclides? El autor de los *Elementos*.” [Sarton, George: *Ciencia antigua y civilización moderna*, p. 29]. Es aquí donde Euclides plantea cinco postulados y cinco nociones comunes, estas últimas llamadas por Proclus axiomas.

Proclus llegó afirmar, esto es interesante, que todas las matemáticas son hipotéticas.

A lo largo de la historia, las matemáticas después de Euclides, tanto los postulados como las nociones comunes fueron considerados *verdades infalibles*. Esta escogencia de postulados es relevante:

La parte más asombrosa del Libro I es la selección de postulados que hizo Euclides. Por supuesto, que el maestro de Euclides en esta materia fue Aristóteles; éste había prestado mucha atención a los principios matemáticos, demostrando cómo no se puede prescindir

de los postulados probando la necesidad de reducirlos a un mínimo; pero la selección de los postulados es obra de Euclides [Sarton, George: *Ciencia antigua y civilización moderna*, p. 33].

Es interesante que Euclides en este libro establece que la existencia de algunos de los conceptos a utilizar se garantiza por la posibilidad de construir rectas y círculos (regla y compás). Es decir, no hay identidad entre definición y existencia, hay que asegurar la existencia a través de un mecanismo: la construcción.

Los *Elementos* contiene trece libros o capítulos (aunque se le añadieron dos libros más escritos por autores posteriores). Los primeros seis son sobre geometría plana, los tres siguientes sobre teoría de números, el décimo sobre inconmensurables, y los tres últimos sobre geometría de sólidos.

Los Libros del I al IV consideran las propiedades de las figuras rectilíneas y los círculos.

El Libro I, por ejemplo, incluye teoremas sobre congruencia, rectas paralelas, el teorema de Pitágoras, construcciones elementales, figuras equivalentes y paralelogramos.

El libro empieza con 23 definiciones, dos de las cuales son:

- “un punto es lo que no tiene parte”,
- “una recta es una longitud sin anchura”.

Los postulados de Euclides también se encuentran en el *Libro I*. Se suele hacer una distinción entre postulados y nociones comunes o axiomas.

➤ *Postulados*

1. Se puede trazar una recta desde un punto a otro cualquiera.
2. Es posible extender un segmento de recta continuamente a una recta.
3. Es posible describir un círculo con cualquier centro y cualquier radio.
4. Que todos los ángulos rectos son iguales.
5. Que si una línea recta corta a otras dos rectas formando con ellas ángulos interiores del mismo lado menores que dos ángulos rectos, las dos líneas rectas, prolongadas indefinidamente, se cortan del lado por el cual los ángulos son menores que dos ángulos rectos.

➤ *Nociones comunes*

1. Cosas que son iguales a la misma cosa son iguales entre sí.
2. Si iguales se suman a iguales, los resultados son iguales.

3. Si iguales se restan de iguales, los restos son iguales.
4. Cosas que coinciden una con otra son iguales entre sí.
5. El todo es mayor que la parte.

Euclides sigue a Aristóteles: mientras que las nociones comunes se aplican a todas las ciencias, los postulados solo a la geometría.

Los dos primeros postulados son abstracciones derivadas de nuestra experiencia con una regla.

El tercer postulado se obtiene de nuestra experimentación con un compás.

El cuarto postulado es tal vez menos obvio y más abstracto, pero se deduce de nuestra experiencia midiendo ángulos con un transportador (donde la suma de ángulos suplementarios es 180, tal que ángulos suplementarios son congruentes entre sí).

La noción cuarta se refiere a la “superposición” de figuras y es *geométrica* en su carácter; por eso debería Euclides haberla colocado más bien como un postulado.

En el Libro I de los *Elementos* de Euclides se consigna el Teorema de Pitágoras:

En todo triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados contruidos sobre los catetos es igual al cuadrado construido sobre la hipotenusa.

Esto se realiza con base en la siguiente figura.

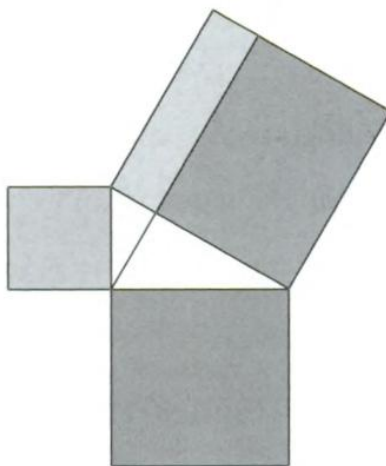


ILUSTRACIÓN 16. Teorema de Pitágoras

La demostración del Teorema de Pitágoras que aparece en el Libro I de los *Elementos* de Euclides, muestra la igualdad entre las áreas sombreadas.

El Libro II es de álgebra geométrica.

El Libro III tiene 37 proposiciones, inicia con definiciones sobre círculos, luego cuerdas, tangentes, secantes, ángulos inscritos y centrales, y esos conceptos de la geometría básica que se enseña en escuelas y colegios. Con base en una traducción al español que ofreció la UNAM de México [Euclides: *Elementos de Geometría III, IV y V*], vamos a citar los principales resultados de los Libros III, IV y V.

El Libro III inicia con las siguientes definiciones:

- D.III.1. Círculos iguales son aquellos cuyos diámetros son iguales o cuyas (líneas) desde el centro son iguales.
- D.III.2. Dícese que una recta es tangente al círculo, cuando toca el círculo y prolongada no lo corta.
- D.III.3. Dícese que los círculos son tangentes mutuamente, cuando se tocan mutuamente y no se cortan mutuamente.
- D.III.4. En el círculo dícese que las rectas distan igualmente del centro, si las perpendiculares trazadas desde el centro a las mismas son iguales.
- D.III.5. Dícese que dista más aquella sobre la cual cae la perpendicular mayor.
- D.III.6. Segmento del círculo es la figura limitada por una recta y por la periferia del círculo.
- D.III.7. Ángulo del segmento es el limitado por una recta y por la periferia del círculo.
- D.III.8. Ángulo en el segmento es el limitado por las rectas trazadas desde un punto de la periferia del segmento a los extremos de la recta que es base del segmento.
- D.III.9. Cuando las rectas que forman el ángulo cortan alguna periferia, dícese que el ángulo consiste en ella.
- D.III.10. Sector del círculo es la figura limitada por las rectas que limitan el ángulo construido en el centro y por la periferia comprendida por ellas.
- D.III.11. Segmentos circulares semejantes son los que abarcan ángulos iguales o aquellos en que los ángulos son iguales.

Y contiene, por ejemplo, los siguientes teoremas:

Teorema III.1

Encontrar el centro de un círculo dado.

Teorema III.2

La línea trazada entre dos puntos, tomados al acaso sobre la periferia del círculo, caerá dentro del círculo.

Teorema III.3

Si una recta por el centro del círculo divide a otra (que) no (pasa) por el centro en dos partes iguales, también la corta en ángulos rectos, y, si la corta en ángulos rectos, también la corta en dos partes iguales.

Teorema III.4

Si en un círculo se cortan dos rectas que no pasan por el centro, no se cortan en dos partes iguales.

Teorema III.5

Si dos círculos se cortan entre sí, no tienen el mismo centro.

El Libro IV tiene 16 proposiciones. Aquí hay figuras inscritas y circunscritas en círculos. Sus definiciones:

- D.IV.1. Dícese que una figura rectilínea está inscrita en otra figura rectilínea, cuando cada uno de los ángulos de la figura inscrita tiene el vértice en cada uno de los lados de la figura en que se inscribe.
- D.IV.2. Análogamente se dice que una figura está circunscrita alrededor de otra figura, cuando cada lado de la figura circunscrita toca a cada uno de los vértices de los ángulos de la figura alrededor de la cual se circunscribe.
- D.IV.3. Dícese que una figura rectilínea está inscrita en un círculo, cuando cada ángulo de la figura inscrita toca la periferia del círculo.
- D.IV.4. Dícese una figura rectilínea está circunscrita alrededor de un círculo, cuando cada lado de la figura circunscrita es tangente de la periferia del círculo.
- D.IV.5. Análogamente dícese que un círculo está inscrito en una figura, cuando la periferia del círculo toca a cada uno de los lados de la figura en la cual se inscribe.
- D.IV.6. Dícese que un círculo está circunscrito a una figura, cuando la periferia del círculo toca a cada uno de los ángulos de la figura alrededor de la cual se circunscribe.
- D.IV.7. Dícese que una recta está adaptada en un círculo cuando los extremos de la misma están sobre la periferia del círculo.

- D.V.13. La razón se llama inversa cuando se toma el consiguiente en lugar del antecedente y el antecedente en lugar del consiguiente.
- D.V.14. Componer la razón es tomar el antecedente junto con el consiguiente como una sola cosa para el mismo consiguiente.
- D.V.15. Substraer la razón es tomar el exceso del antecedente sobre el consiguiente al mismo consiguiente.
- D.V.16. Convertir la razón es tomar el antecedente con la diferencia que hay entre el antecedente y el consiguiente.
- D.V.17. Dícese razón igual cuando, dado un número cualquiera de magnitudes, de tal manera que de dos en dos sean respectivamente proporcionales a otras magnitudes, en las primeras magnitudes la primera es a la última como también en las segundas la primera es a la última; o, de otra manera, cuando se consideran los términos exteriores sin considerar los medios.
- D.V.18. Razón perturbada se llama cuando, dadas tres magnitudes y otras tres, en las primeras magnitudes el antecedente está al consiguiente como en las segundas el antecedente está al consiguiente, y como en las primeras el consiguiente es a otra cosa en las segundas otra cosa es al antecedente.

Sus teoremas son relevantes, los citamos todos al final de este capítulo, para beneficio del lector. Aquí mencionamos los dos primeros.

Teorema V1

Dado un número cualquiera de magnitudes, que sean respectivamente equimúltiplos de otras magnitudes cualquiera, cuantas veces es múltiplo una magnitud de otra, otras tantas lo serán todas de todas las otras.

Teorema V2

Si una primera magnitud es múltiplo de una segunda el mismo número de veces que una tercera es múltiplo de una cuarta y una quinta es múltiplo de la segunda el mismo número de veces que una sexta es múltiplo de la cuarta, entonces también la primera y la quinta juntas serán múltiplos de la segunda el mismo número de veces que la tercera y la sexta lo son de la cuarta.

Algunos se han preguntado si esta teoría de las magnitudes y proporciones era suficiente para sostener lógicamente una teoría de los números reales, a pesar de que la mayor parte de matemáticos a lo largo de la historia de las matemáticas sólo la concibió como un fundamento para la geometría. La opinión más generalizada es negativa y tiende a subrayar que el Libro V y su teoría de las proporciones no podía servir como sustento más allá de la geometría.

Los Libros VII, VIII, y IX, tratan de la teoría de números o, mejor dicho, acerca de las propiedades de los números enteros y de las razones de números enteros. Sólo estos libros de los *Elementos* tratan la aritmética.

Si bien Euclides usa segmentos de recta para representar números y rectángulos para el producto de los números, sus resultados no dependen enteramente de la geometría.

En ningún momento hay rastro en esta obra, debe decirse, de simbolismo.

El Libro X de los *Elementos* trata de clasificar diferentes tipos de números irracionales, o sea magnitudes inconmensurables. Los Libros X, XI, y XIII tratan de la geometría sólida y del método de exhaustión. Este último libro contiene 18 teoremas sobre áreas y volúmenes, en especial de figuras curvilíneas o acotadas por superficies. Sobre el Libro X, nos comenta Sarton:

Los algebristas babilónicos no conocían las cantidades irracionales, en tanto que el Libro X de los *Elementos* (el más extenso de los trece, todavía más que el Libro I) está dedicado exclusivamente a ellas. En este caso, una vez más, Euclides edificó sus teorías sobre cimientos más antiguos, pero éstos, ahora, fueron únicamente griegos. Podemos creer el relato que atribuye a los primitivos pitagóricos el conocimiento de las cantidades irracionales y el amigo de Platón, Teeteto (IV-1 a.C.), formuló una amplia teoría de ellas, así como de los cinco sólidos regulares. Nada prueba mejor el genio matemático griego (opuesto al babilónico) que la teoría de las irracionales tal como fue expuesta por Hipaso de Metaponto, Teodoro de Cirene, Teeteto de Atenas y, finalmente, por Euclides. Es imposible decir con exactitud qué parte del Libro X se debe a Teeteto y cuál a Euclides [Sarton, George: *Ciencia antigua y civilización moderna*, p. 39].

La idea básica del método de exhaustión es, por ejemplo, para probar relaciones entre áreas de círculos, inscribir polígonos regulares en los círculos y utilizar las propiedades o verdades de los polígonos para demostrar las de los círculos. Se trata de inscribir sucesivamente polígonos con un mayor número de lados, de tal manera que se aproxime mejor el área de los círculos.

El término “exhaustión” fue consignado hasta el siglo XVII.

Un asunto muy importante es que este método da la impresión de un acercamiento casi completo al concepto de límite, como un método de aproximación. La realidad es que no es así. En todas estas pruebas, al final, en algún momento de los procedimientos usados para la demostración, todo descansa en el método indirecto, sin utilizar elemento alguno en la dirección del concepto de límite.

Es curioso que, desde el punto de vista de la deducción lógica, el trabajo de Euclides en torno a las áreas y volúmenes es más riguroso que el de Newton y Leibniz (más bien basado en el álgebra y los sistemas numéricos que en la deducción geométrica). Los *Elementos* de Euclides contienen 467 proposiciones. Los Libros XIV y XV tratan de sólidos regu-

lares, pero no fueron escritos por Euclides. El XV es poco claro e impreciso, el XIV se supone escrito por Hipsicles (c. 150 a.C.) y algunas de sus partes escritas en el siglo VI d.C.

En general, se sabe que la presentación de las proposiciones en los *Elementos* no es original de Euclides, pero la forma de presentación de toda la obra aparentemente sí es original (axiomas, definiciones explícitas, cadena de teoremas y la estructura lógica de lo simple a lo complejo en los teoremas). Hay, además, una selección, un escogimiento deliberado, de los teoremas.

Nadie puede negar el magistral trabajo de ordenamiento, sistematización, organización lógica, que aparece en los *Elementos* de Euclides. Hay un orden lógico decisivo: “Este orden es lo que constituye la esencia y la grandeza de los *Elementos*, pero los sabios medievales no vieron esto, o al menos no lo vieron hasta que los comentaristas musulmanes les abrieron los ojos” [Sarton, George: *Ciencia antigua y civilización moderna*, p. 43].

Sin embargo, este modelo de rigor que fue asumido como paradigma durante toda la historia de las matemáticas, poseía algunos problemas que son importantes de mencionar. Por ejemplo, según señalan algunos historiadores, el uso de la superposición, así como las explicaciones en busca de significados en las definiciones iniciales de punto, línea y superficies (las que son innecesarias puesto que, en esencia, se trata de términos indefinidos).

Debe mencionarse que, a pesar de la organización lógica y comprensiva de los contenidos de los *Elementos*, estos 13 libros no forman una unidad, más bien se trata de una compilación de libros previos. De hecho, hay resultados que se repiten en varios libros. Algunos historiadores consideran que los Libros X, XI y XII fueron escritos más bien por Teeteto.

Aunque a veces no se conoce el hecho, Euclides escribió otros libros además de los *Elementos*: la *Óptica*, la *Catóptrica*, los *Datos*, *Pseudaria*, *Sobre las divisiones*, *Porismas*, los *Fenómenos* y *Superficies-Lugares*.

¿Cómo valorar la obra de Euclides? Sarton nos ofrece un juicio bastante equilibrado:

Si tuviéramos en cuenta, como deberíamos, la obra de los egipcios y de los babilonios, veríamos que los *Elementos* de Euclides representan la culminación de un esfuerzo de más de mil años. Se podría objetar que Euclides merece ser llamado el padre de la geometría por otra razón. Aun concediendo que se hicieron muchos descubrimientos antes que él, Euclides fue el primero que reunió en una síntesis todos los conocimientos alcanzados por los demás y por él mismo, y que puso a todas las proposiciones conocidas en un sólido orden lógico. Esta afirmación no es enteramente verdadera. Algunas de esas proposiciones habían sido demostradas antes de Euclides y se habían establecido ya series de ellas. Además, Hipócrates de Quío (V-1 a.C.) León (IV-1 a.C.) y Teudio de Magnesia (IV-2 a.C.) habían escrito “*Elementos*” antes que Euclides. El tratado de Teudio, que Euclides conocía muy bien, había sido preparado para la *Academia* y es posible que en el *Liceo* estuviese en uso uno semejante. Sea como fuere, Aristóteles conocía la teoría de las proporciones de Eudoxo y el método exhaustivo, que luego Eucli-

des amplió en los Libros V, VI y XII de los *Elementos*. En resumen, bien consideremos los teoremas particulares, o los métodos, o el orden de los *Elementos*, Euclides rara vez fue un completo innovador; hizo mucho mejor y en mayor escala lo que otros geómetras habían hecho antes que él [Sarton, George: *Ciencia antigua y civilización moderna*, pp. 31-32].

◆ APOLONIO

Nacido en Perga, Apolonio (c. 262-190 a.C.) se educó en Alejandría con discípulos de Euclides. Un vínculo directo con los métodos y las premisas intelectuales desarrolladas por el autor de los *Elementos*. Aunque se reconoce su trabajo en las *Secciones Cónicas* como su principal logro, sin embargo, escribió sobre otros temas. Un libro perdido de Apolonio, *Repartos rápidos*, trataba de métodos para efectuar cálculos rápidos, donde había, se supone, una aproximación de π mejor que la que ofreció Arquímedes. Otras obras, todas perdidas: *Secciones en una razón dada*, *Secciones en un área dada*, *Secciones determinadas*, *Tangencias* (o *Contactos*), *Inclinaciones* y *Lugares planos*. Muchas de las referencias del trabajo de Apolonio se encuentran en Pappus (en su *Colección Matemática*). Su obra fue tan relevante que se le llegó a conocer como el “gran geómetra”.

Sin certeza completa, y con base en descripciones de otros autores, se puede señalar los temas que trataron algunas de estas obras. Por ejemplo, *Secciones en una razón dada* trataba casos del siguiente asunto: si se tienen dos rectas cada una con un punto sobre ellas, el problema es trazar otra recta por otro punto de tal manera que al cortar a las otras rectas se determinen segmentos que se encuentren en una proporción dada; los segmentos son las longitudes entre los puntos sobre cada recta. Vea la figura siguiente.

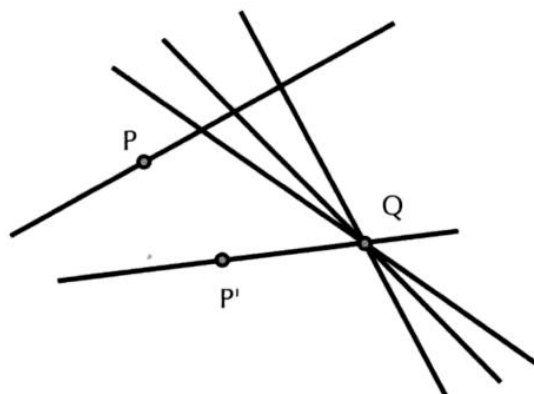


ILUSTRACIÓN 17. Secciones en una razón dada

Secciones en un área dada refería a un problema similar, que los segmentos determinados por la construcción de un rectángulo equivalente a otro dado.

Secciones determinadas respondía al problema de determinar lo siguiente: dados cuatro puntos A, B, C, y D sobre una recta L, obtener un punto P sobre la misma recta tal que el

EUDOXUS' AXIOM AND ARCHIMEDES' LEMMA

BY

JOHANNES HJELMSLEV*

1. It is a well-known fact that modern students of the writings of the old mathematicians have great difficulty in resisting the distracting impact of the modern mechanism of science on their thoughts. I believe I have found a striking example of this kind in the prevailing interpretation of ARCHIMEDES' theory of magnitudes, as for this reason nobody—as far as I can see—has yet succeeded in penetrating sufficiently into Archimedes' thoughts. Further demonstration of this is attempted in what follows.

2. With Archimedes, and particularly with his treatise *On the Sphere and Cylinder*, the Greek theory of magnitudes enters on a new epoch. Quite new magnitudes, such as the length of curved lines and the area of curved surfaces, are drawn into the field of investigation, and for these magnitudes definite rules are set up, formulated in the following postulates of magnitudes (here given in a somewhat abbreviated form after T. L. HEATH, *The Works of Archimedes*):

1°. Of all lines which have the same extremities the straight line is the least.

2°. Of two convex lines which have the same extremities, and of which one encloses the other, the outer is the greater.

3°. A plane area is smaller than a curved area with the same circumference.

4°. Of two convex surfaces covering the same plane area, and one of which encloses the other, the outer is the greater.

* Late professor of mathematics, University of Copenhagen.

5°. Further, of unequal lines, unequal surfaces, and unequal solids, the greater exceeds the less by such a magnitude as, when added to itself, can be made to exceed any assigned magnitude among those which are comparable with [it and with] one another.

3. The last supposition (5°) (*Archimedes' lemma*) will receive special treatment in what follows.

In it lies the instrument that makes possible an extension of the main theorems in the theory of magnitudes founded by EUDOXUS—as we know it from EUCLID, Book V—in such a way that it can be applied to the new magnitudes.

But first of all, of course, the introductory definitions in the Eudoxean theory of proportions have been taken over, especially

A. *Eudoxus' axiom* (Eucl. V, def. 4), which gives the conditions under which two magnitudes, a , b , can be said to have any ratio to each other:

Magnitudes are said to have a ratio if any one of them by being added a sufficient number of times to itself can be made to exceed the other.

$$(a < b, a + a + \dots + a > b).$$

Further

B. The definition of equal ratios a/b and c/d : If $ma \gtrless nb$, then respectively $mc \gtrless nd$ for each set of integers m , n .

C. The definition of unequal ratios: $a/b > c/d$, if there exists a set of integers m , n so that $ma > nb$, but $mc \leq nd$.

From the theory of proportions proper it is in Archimedes' investigations the main rule that is applied, stating that

$$\begin{aligned} a &\gtrless b \text{ yields respectively} \\ a/c &\gtrless b/c \text{ (or } c/a \gtrless c/b). \end{aligned}$$

But the proof of this proposition presupposes (Eucl. V, 8)—regard is here had only to the uppermost sign ($a > b$)—the existence of an integral number n so that

$$n(a-b) > c.$$

In the Eudoxean theory of proportions this was a direct consequence of Eudoxus' axiom, as for the fields of magnitudes considered there $a-b$ always existed as a magnitude of the same kind as those given. But for the new field of magnitudes with which Archimedes was now concerned this could by no means be presupposed. What, for instance, was to be

understood by $a-b$ when a was the arc of a circle, and b a straight line? Or a the surface of a sphere, and b a plane area?

As his way out of the difficulty Archimedes chose to put his lemma as the last step in the fundamental assumptions concerning the new magnitudes, or, if you prefer it: as the last step in the definition of these:

When $a > b$, the difference $a-b$ is an *ideal magnitude*, to which the same procedure is applicable as in the Eudoxean theory of magnitudes: that to any case that may arise there always exists such an integer n that $n(a-b)$ is greater than any given magnitude c of the same kind as a and b .

4. That this was Archimedes' view can be seen clearly enough already from the care—one might almost say awe—with which in his introductory letters he mentions his lemma, already in the treatise *On the Quadrature of the Parabola*, but especially in the treatise *On the Sphere and Cylinder*, where the basic principles are stated in detail for the first time; later on also in his treatise *On Spirals*. But it appears with absolute certainty from the whole systematic structure of Archimedes' system, as will be further illustrated below.

Hitherto nobody seems to have realized the special significance of Archimedes' lemma. It has simply been interpreted as equivalent to Eudoxus' axiom, and it is a well-known fact that in generally accepted modern mathematical usage Eudoxus' axiom is referred to as Archimedes' axiom¹.

Moreover the view had been advanced that Archimedes himself took it for granted that a ratio can always be represented as a ratio between two lines. That this is an evident misunderstanding can be seen already from the fact that if it were so Archimedes' lemma would be quite superfluous.

¹ The mistake goes back to O. Stolz, *Zur Geometrie der Alten, insbesondere über ein Axiom des Archimedes* ("Eine Grösse kann so oft vervielfältigt werden, dass sie jede andere ihr gleichwertig übertrifft"); Innsbr. Ber. XII, 1882; Math. Ann., XXII.

Later adopted by G. Veronese in *Fondamenti di geometria* ... 1891 (German edition: *Grundzüge der Geometrie* ... 1894; footnote p. 95): "Stolz ist, so viel wir wissen, der erste gewesen, der die Aufmerksamkeit der Mathematiker auf diesen von ihm mit Recht *Axiom des Archimedes* genannten Satz gelenkt hat ..."

Later the same designation was adopted by Hilbert in *Grundlagen der Geometrie*, 1899.

H. G. Zeuthen has repeatedly protested against the misnomer (thus at the Heidelberg congress, 1904).

5. But we shall now proceed to a more detailed documentation taking a concrete example of Archimedes' demonstration, viz. Proposition 2 in his treatise *On the Sphere and Cylinder I*. We shall begin by quoting T. L. Heath, *The Works of Archimedes*, p. 5:

Given two unequal magnitudes, it is possible to find two unequal straight lines such that the greater straight line has to the less a ratio less than the greater magnitude has to the less.

Let AB, D represent the two unequal magnitudes, AB being the greater.

Suppose BC measured along BA equal to D, and let GH be any straight line.

Then, if CA be added to itself a sufficient number of times, the sum will exceed D. Let AF be this sum, and take E on GH produced such that GH is the same multiple of HE that AF is of AC.

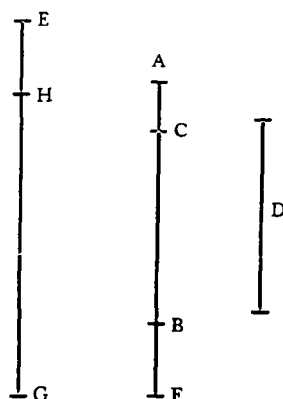
Thus $EH/HG = AC/AF$.

But since $AF > D$ (or CB),

$$AC/AF < AC/CB.$$

Therefore, *componendo*,

$$EG/GH < AB/D.$$



Hence EG, GH are two lines satisfying the given condition.

6. On the proof reproduced above we shall now make the following comments:

In the figure the given magnitudes are symbolized by the straight lines AB and D, $AB > D$, so that the difference can easily be symbolized (by AC), together with its multiple, which according to Archimedes' lemma should exceed D. But all this is only a symbolic representation to enable us to retain the magnitudes in question in our minds. Beside is represented a real, straight line, on which the required segments should be measured.

In the study of Archimedes it is very important to insist on this distinction between ordinary magnitudes and segments of lines.

Proposition 2, with which we are here concerned, finds one of its most important applications in the proof that the surface O of the sphere = 4 times the great circle c (Prop. 33); the proof is given indirectly by show-

ing that O can be neither greater nor less than $4c$, in both cases by making use of Prop. 2 applied to the case where the given magnitudes are O and $4c$, which of course Archimedes does not think of replacing by "proportional lines".

7. It is true that a contrast to the above remarks is found in a curious fact, viz. the following:

As the Greek text has come down to us (HEIBERG'S Archimedes edition I, pp. 14-15) it contains a reference to Euclid's *Elements* I,2 occasioned by the introduction of the difference shown in the figure (on the above figure: AC) between the given magnitudes AB and D . As if this difference could have anything to do with the construction mentioned in Euclid I,2 (which, by the way, at any rate is an error for I,3)! In a footnote Heiberg quotes a passage from PROCLUS, from which it should appear that the Archimedes texts already at that time contained the same reference to Euclid. But the reference is at any rate quite naïve and must have been inserted by an inexperienced copyist.

When in a treatise from 1909² ZEUTHEN by the mentioned reference is led to give the following general statement of the basis of Archimedes' ideas: "ein Verhältniss kann immer als das Verhältniss zweier Strecken dargestellt werden," then this is quite incomprehensible. *Archimedes can have meant no such thing*. Nowhere has he made any proposition to this effect, and by means of the propositions he has made he cannot prove it.

If this was the case he might have saved himself the trouble of his considerations concerning the proof of Prop. 2: He might have been content with a reference to the effect that the two magnitudes were proportional to two segments of a line, and then simply make the greater of these a little less.

8. But we proceed with our discussion of the proof of Prop. 2. The next point to be mentioned is the following:

From $AF > BC$ we conclude that $AC/AF < AC/BC$.

The rule here applied we express by simpler notation thus:

From $a > b$ follows $c/a < c/b$.

It has been taken over from Eudoxus' theory of proportions, and as mentioned above (3) had there been proved by the fact that we could

² *Über einige archimedische Postulate* (Archiv f. d. Geschichte der Naturwissenschaften und der Technik, I, 1909).

find an integer n so that $n(a-b) > c$, which follows from Eudoxus' axiom so long as a and b are such magnitudes that their difference proves to be a magnitude of the same kind as those given; but when a and b are magnitudes of a more general kind, as here in Archimedes' theory of magnitudes, the mentioned condition necessarily leads to the formulation of Archimedes' lemma.

9. The last question we shall mention in connection with the proof of Prop. 2 is the transition from the inequality

$$EH/HG < AC/BC,$$

to the inequality

$$EG/GH < AB/D,$$

or with simpler notation

$$\text{from } a/b < c/d$$

$$\text{to } (a + b)/b < (c + d)/d.$$

Of this conclusion Archimedes gives no proof, and it is not mentioned in the *Elements* (in Euclid is only mentioned the corresponding proposition with the sign of equation, Euclid V, 18). In Eutocius' commentary is given a proof which we shall reproduce here:

We first find a magnitude x so that

$$b/a = d/x, \text{ or } a/b = x/d,$$

from which follows according to Eucl. V, 18

$$(a + b)/b = (x + d)/d.$$

But $a/b < c/d$, consequently $x/d < c/d$, $x < c$,

from which again follows

$$x + d < c + d, \quad (x + d)/d < (c + d)/d,$$

and as

$$(x + d)/a = (a + b)/b$$

it finally follows that

$$(a + b)/b < (c + d)/d, \text{ q.e.d.}$$

A similar proof is found in PAPPUS.

To these proofs can be objected that they do not answer Archimedes' purpose, as they are based on the existence of a fourth proportional x corresponding to three magnitudes b , a , d :

$$b/a = d/x,$$

in the case when the magnitudes on one side (b and a) are segments of lines, while the magnitudes on the other side (d and x) are magnitudes in general, (or vice versa). The existence of such a fourth proportional is, however, outside Archimedes' assumptions and cannot be proved by these.

This consideration leads to such questions as the above: whether we can presuppose the existence of segments of lines proportional to two given general magnitudes, a presupposition which Archimedes has not formulated and in the whole of his exposition of the general theory of magnitudes (in his treatise *On the Sphere and Cylinder* and in later works) clearly enough endeavoured to avoid, in which he also succeeded completely.

Thus Eutocius' and Pappus' proofs serve as commentaries on Archimedes' last step in the proof of Prop. 2. On closer examination, however, we see that no commentary is needed. The proposition required follows directly from the definition of unequal ratios:

From $a/b < c/d$, i.e. $ma < nb$, $mc \geq nd$,

follows $m(a + b) < (m + n)b$, $m(c + d) \geq (m + n)d$,

consequently $(a + b)/b < (c + d)/d$,

which proves the proposition.

Apparently Archimedes has thought it superfluous to give this proof.

10. To throw more light on the fundamental questions concerning the understanding of Archimedes' theory of magnitudes to which I have called attention in the preceding pages we shall with modern aids construct the following algebraic example: We build up a coordinate-geometry with Pythagorean metric where the coordinates do not include all real numbers, but only all real, algebraic numbers. In this geometry it is possible to establish a theory of magnitudes in which all Archimedes' propositions are valid. But in this geometry no segment of a straight line exists = the circumference of a circle. Hence follows further that given a segment of

a line l and the circumference of a circle c , two segments of lines, a and b , proportional to l and c do not exist, as in that case the fourth proportional to the segments of lines a , b , l would define a segment of line $= c$.

But this proves that Archimedes' theory of magnitudes neither explicitly nor implicitly contains any proposition to the effect that there always exist two lines proportional to two given general magnitudes, or that there always exists a fourth proportional to three given magnitudes.

11. That by his theory of magnitudes Archimedes is unable to prove the existence of a line equal to a given circumference of a circle of course also follows from the above. But that he—on purpose—planned his theory of magnitudes in such a way that he did not beforehand incorporate any assumption concerning the existence of such a segment of line is manifest from his treatise *On Spirals*, Prop. 4, which runs as follows (after Heath) :

"Given two unequal lines, viz. a straight line and the circumference of a circle, it is possible to find a straight line less than the greater and greater than the less:

For, by the Lemma, the excess can, by being added a sufficient number of times to itself, be made to exceed the lesser line.

Thus e.g. if $c > l$ (where c is the circumference of the circle and l the length of the straight line), we can find a number n such that.

$$n(c-l) > l.$$

$$\text{Therefore } c-l > \frac{l}{n},$$

$$\text{and } c > l + \frac{l}{n} > l.$$

Hence we have only to divide l into n equal parts and add one of them to l . The resulting line will satisfy the condition."

If here Archimedes had taken c to be equal to a definite straight line, there would not be any reason to set up the above proposition as in that case the statement would be obvious.

12. It is, however, interesting to see where he finds a later use for the proposition. He does so when writing on the tangent of the spiral, Prop. 18, where it is stated that (in modern usage) the polar subtangent OB at the point A at the end of the first complete turn of the spiral OA is equal to the circumference of a circle with the radius OA . The proof (not repeated here) is to the effect that the polar subtangent can be neither, greater nor less than the said circumference.

Thus the existence of the spiral tangent, which Archimedes evidently does not doubt, implies the existence of a straight line = the circumference of the said circle. It seems that from the moment this fact was before him Archimedes here saw a certain supplementary basis for further investigations on the rectification and quadrature of the circle, such as he made later in his treatise *On the Measurement of the Circle*.

It is true that after the discovery and deciphering of Archimedes' *Method* in 1906 Heiberg and Zeuthen, induced by a certain passage in it, were inclined—in contrast to their former views—to come round to the view that the treatise *On the Measurement of a Circle* must be older than the treatise *On the Sphere and Cylinder*. The passage runs as follows in Heiberg's translation³:

“Durch diesen Lehrsatz, dass eine Kugel viermal so gross ist als der Kegel, dessen Grundfläche der grösste Kreis, die Höhe aber gleich dem Radius der Kugel, ist mir der Gedanke gekommen, dass die Oberfläche einer Kugel viermal so gross ist als ihr grösster Kreis, indem ich von der Vorstellung ausging, dass, wie ein Kreis einem Dreieck gleich ist, dessen Grundlinie die Kreisperipherie, die Höhe aber dem Radius des Kreises gleich, ebenso ist die Kugel einem Kegel gleich, dessen Grundfläche die Oberfläche der Kugel, die Höhe aber dem Radius der Kugel gleich.”

But the starting-point of the conception mentioned here, i.e. the relation between the circumference and the area of the circle, was surely of old so familiar at Archimedes' time that it can at any rate be traced as far back as the studies of the quadratrix, so that the fact that it is mentioned in the connection referred to above should not be any strong motive for us to date it together with or before the *Method*.

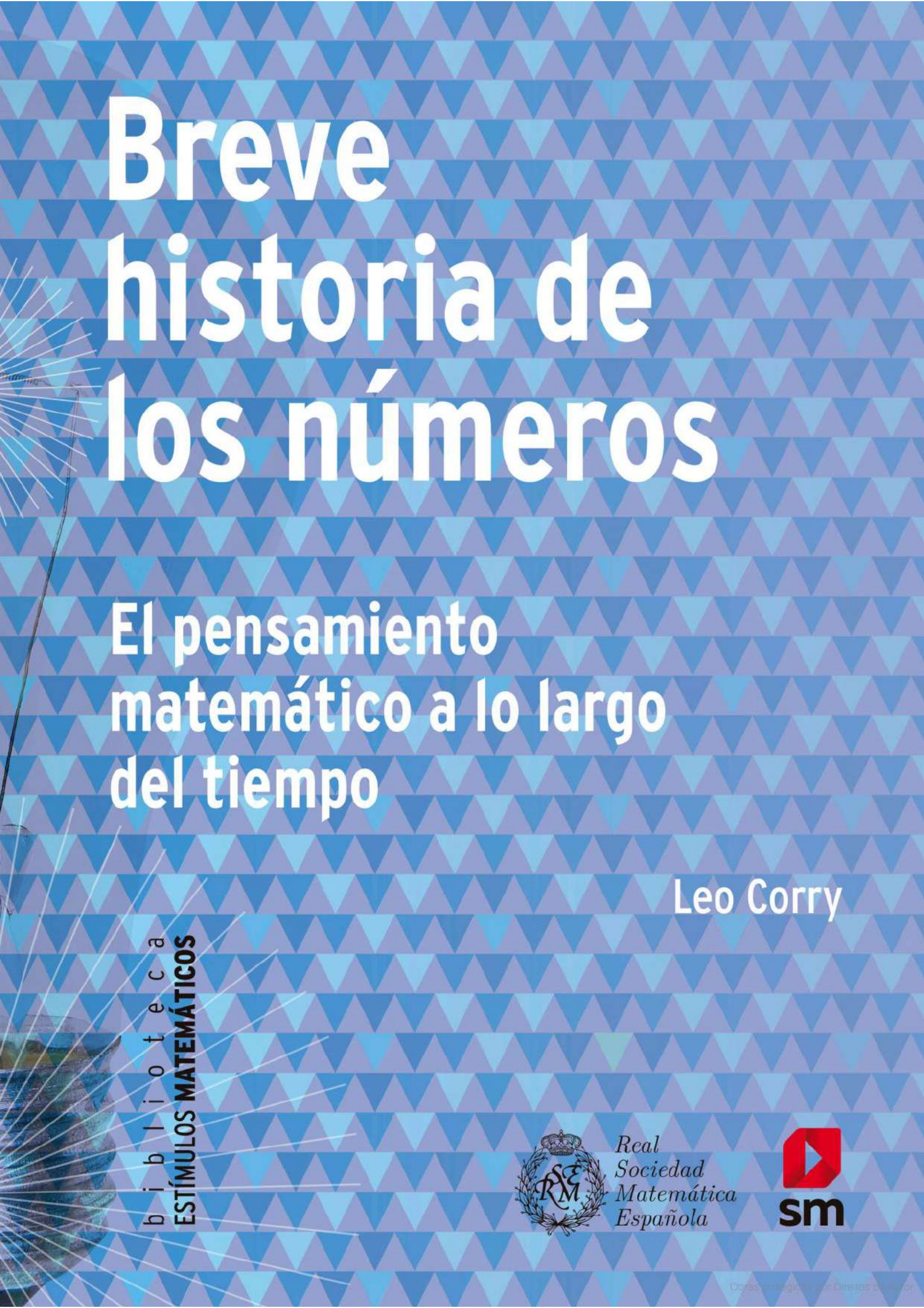
It seems to carry greater weight—besides the above consideration in the treatise *On Spirals*—that not only have some introductory passages on inscribed and circumscribed polygons from the theory of proportion in the treatise *On the Sphere and Cylinder* (under Prop. 1 and Prop. 6) been used in the treatise *On the Measurement of a Circle*, but one of these passages (the last under Prop. 6): “that it is possible to circumscribe such a polygon about the circle that its area exceeds that of the circle by a magnitude less than any given area”, has been proved in both treatises, but in a simpler way in the treatise *On the Measurement of a Circle* than in the other treatise.

³ Heiberg-Zeuthen, *Eine neue Schrift des Archimedes*, Bibliotheca Mathematica, Dritte Folge, VII, 1907, S. 328.

13. As mentioned above Archimedes has no possibility of proving the existence of a straight line \equiv a given circumference of a circle by means of his propositions of magnitude. But surely he has realized the fact that while the ratio of the surface of the sphere to the great circle could be expressed by the simple integer 4, the ratio of the circumference of the circle to the diameter was of a much more complicated nature, so that it could only be described by the use of less numbers and greater numbers.

But his investigations in his theory of magnitudes border so closely on modern existence proofs that the instrument that might lead direct to these is of a purely formal nature: the extension of the Eudoxean theory of the proportions of segments of straight lines so that it also includes "non-terminated segments of lines". The latter conception is arrived at in the following way: If on a segment AB of a straight line are given a series of segments AA_1, AA_2, \dots , each of them forming part of the following one and there exists no segment of a line that is exhausted by this series, then the set of points they comprise defines a "non-terminated segment of line."

All terminated and non-terminated segments of lines form a field of magnitude for which the whole of the Eudoxean theory of proportions is easily proved to be valid as soon as we introduce the definitions of Sum, Difference, Greater, and Less that naturally suggest themselves. And this takes us direct from the ancient to the modern theory of magnitudes.



Breve historia de los números

El pensamiento
matemático a lo largo
del tiempo

Leo Corry

b i b l i o t e c a
ESTÍMULOS MATEMÁTICOS



*Real
Sociedad
Matemática
Española*



Dirección del proyecto: Adolfo Sillóniz

Diseño de cubiertas: Dirección de Arte Corporativa de SM

Autor: Leo Corry

© Real Sociedad Matemática Española y SM

Revisión científica: Fernando Barbero, Alberto Espuny y Roberto Muñoz

Estilo de \LaTeX : Gregorio Morales

Editor General de la Real Sociedad Matemática Española: Joaquín Pérez

Responsable de la Real Sociedad Matemática Española de la colección: Luis Hernández Corbato

Traducción: Laura Cánovas i Hidalgo y Alberto Espuny Díaz

Debido a la naturaleza dinámica de internet, SM no puede responsabilizarse por los cambios o las modificaciones en las direcciones y los contenidos de los sitios web a los que se remite en este libro.

ISBN: 978-84-1392-243-0

Depósito legal: M-20258-2021

Impreso en España / *Printed in Spain*

Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta obra solo puede ser realizada con la autorización de sus titulares, salvo excepción prevista por la ley.

Si necesita fotocopiar o escanear algún fragmento de esta obra, diríjase a CEDRO (Centro Español de Derechos Reprográficos, www.cedro.org).

información sobre este debate). También sabemos que el descubrimiento de las magnitudes inconmensurables tuvo consecuencias importantes para el desarrollo de la idea de número.

La primera fue el establecimiento de una distinción exhaustiva y sistemática entre números discretos (*arithmos*) y magnitudes continuas (*megethos*). Estas últimas, que comprenden longitudes, áreas y volúmenes, pueden ser subdivididas indefinidamente. Los números, por el contrario, son siempre agrupaciones o colecciones de elementos individuales indivisibles. Además, estos números siempre cuentan algún tipo concreto de objeto. El distinguido académico Jacob Klein (1899-1978), famoso intérprete del legado filosófico de Platón, señaló con gran acierto que en la concepción primitiva de los números para los griegos, las entidades que contaban los *arithmos*,

[...] por muy diferentes que sean, se consideran como uniformes al contarlas; son, por ejemplo, o bien manzanas, o bien manzanas y peras que se cuentan como fruta, o manzanas, peras y platos que se cuentan como objetos. [...] Así, el *arithmos* indica en cada caso un número definido de cosas definidas⁵.

Esta distinción básica entre números (discretos) y magnitudes (continuas) tuvo mucha influencia en la tradición matemática griega y en todas aquellas sobre las que esta influyó. Se transmitió al mundo islámico y más tarde a Europa, donde continuó en el trasfondo de todas las discusiones sobre el concepto de número hasta bien entrado el siglo XVII. La idea moderna de número, como veremos, no podría haberse consolidado como lo hizo en su momento si esta distinción hubiese continuado siendo dominante. La razón esencial para ello era que los números irracionales serían, según la distinción griega, magnitudes continuas que no se pueden entender en ningún caso como ejemplos de la misma idea general que subyace a la noción de número natural discreto.

Una segunda consecuencia del descubrimiento de las magnitudes inconmensurables estuvo relacionada con el reto técnico, mencionado anteriormente, de redefinir los conceptos de razón y proporción. Se hizo necesaria una nueva definición que pudiera incluir también a los pares de magnitudes inconmensurables. El reto se superó satisfactoriamente con una nueva teoría comúnmente atribuida a Eudoxo de Cnido (408-355 a. C.), que se hizo ampliamente conocida a través del Libro V de los *Elementos*, el famoso tratado de Euclides de Alejandría (fl. 300 a. C.). Los *Elementos*, una obra de trece libros escritos alrededor del 300 a. C., presentaba de una forma sistemática y exhaustiva las herramientas básicas de las matemáticas griegas elementales (así como otros temas más avanzados). En los próximos capítulos hablaremos ampliamente del tratado de Euclides, que hasta el siglo XVII fue un pilar fundamental para el desarrollo de las ideas matemáticas y las técnicas para resolver problemas. La nueva teoría eudoxiana de las proporciones fue un elemento fundamental del sistema de conocimiento contenido en los *Elementos*.

3.4 La teoría de las proporciones de Eudoxo

En el Libro V de los *Elementos*, una razón se define como “un tipo de relación referente al tamaño entre dos magnitudes del mismo tipo”. Francamente, esta definición no parece demasiado útil ni es matemáticamente precisa. Sin embargo, y como sucede con muchas de las definiciones de Euclides, no deberíamos esperar siempre una definición formal del tipo de las que encontramos en un libro de matemáticas moderno. Si definimos, por ejemplo, una línea recta como “la distancia más corta entre dos puntos”, esto es para nosotros como el fusil de Chéjov, que en el primer acto de una obra cuelga de la pared y con certeza se dispara en el tercero. Es seguro que en algún punto del libro de matemáticas se usará la definición de línea recta que se da al principio y que, además, su formulación precisa será necesaria para probar un resultado crucial. Esto no pasa con las definiciones de Euclides. Por ejemplo, en el Libro I de los *Elementos* dice que “un punto es aquello que no tiene

⁵Klein 1968, p. 46.

partes”, pero esta propiedad definitoria no se menciona ninguna otra vez en el libro y no se usa en ninguna demostración. Un caso distinto es el del círculo, que se define como sigue: “Un círculo es una figura plana delimitada por una línea tal que todas las líneas rectas que llegan a ella desde un punto de los que están contenidos en su interior son iguales las unas a las otras”. La propiedad que define aquí dicho punto —que es, por supuesto, el centro del círculo— se usa de forma crucial en algunas demostraciones. Algunas definiciones, como la de razón, son comentarios bastante generales sobre ideas relacionadas que no siempre se usan para probar resultados. Estas definiciones, de hecho, tienen más que ver con el discurso matemático que con el contenido técnico necesario para desarrollar teorías y demostraciones.

En cualquier caso, la parte crucial de la definición euclidiana de razón, es aquella que dice que las dos magnitudes comparadas han de ser “del mismo tipo”. Esto es lo que es realmente relevante para lo que él hace con las razones. Euclides explica que las razones de dos magnitudes existen solo si “cuando se multiplican tienen la capacidad de exceder una a la otra”. Esto significa que, por ejemplo, dos *longitudes* son magnitudes del mismo tipo, ya que podemos añadir repetidamente la más pequeña a sí misma, cuantas veces haga falta, hasta que sobrepase a la más larga. Lo mismo ocurre con dos *áreas*, dos *volúmenes* o, salvando algunas diferencias, dos *ángulos*. En consecuencia, podemos definir la razón de dos longitudes, la de dos áreas o la de dos volúmenes. Por el contrario, da igual cuántas veces añadamos un segmento a sí mismo, nunca “sobrepasará” ninguna área dada, por tanto no se puede definir la razón entre una longitud y un área.

Una vez que sabemos que podemos hablar de la razón entre dos magnitudes del mismo tipo, el siguiente paso es explicar cómo comparar dos razones cualesquiera. Si nos dan dos magnitudes A y B del mismo tipo (por ejemplo, dos áreas), definen una primera razón que, por conveniencia, escribimos anacrónicamente como $A : B$. Recordemos, sin embargo, que Eudoxo, Euclides y los demás matemáticos griegos no disfrutaron del privilegio de disponer de un lenguaje simbólico como el nuestro y hacían todos sus razonamientos de manera completamente retórica. De igual modo, si nos dan otras dos magnitudes C y D del mismo tipo (por ejemplo, dos longitudes), estas definen una segunda razón que denotamos como $C : D$. Obsérvese que C es del mismo tipo que D , pero estas dos no son necesariamente del mismo tipo que A y B . La teoría de Eudoxo define las condiciones bajo las cuales $A : B$ es la misma razón que $C : D$. Si dos magnitudes cualesquiera fueran siempre conmensurables (como se dio por supuesto durante mucho tiempo), entonces la comparación sería fácil. En efecto, si $A : B :: m : n$ y $C : D :: j : k$ entonces las cuatro magnitudes serían proporcionales, $A : B :: C : D$, si los enteros que definen las razones fueran proporcionales, es decir, si $m : n :: j : k$, lo que sería fácil de comprobar, siguiendo la forma de pensar pitagórica, por ser razones de enteros.

Pero el reto que tuvo que afrontar Eudoxo fue precisamente que no siempre podemos contar con la ayuda de tales razones de enteros para resolver el problema. Eudoxo sugirió una forma verdaderamente ingeniosa de superar esta dificultad. De hecho, sus ideas se aproximan bastante a algunas de las que Richard Dedekind utilizó a finales del siglo XIX para definir satisfactoriamente los números reales. Algunos matemáticos e historiadores han llegado a afirmar que las ideas de Eudoxo y Dedekind son equivalentes. De todas formas intentaremos ver las diferencias cuando discutamos esto en detalle en el apéndice 10.1. En todo caso, y sin lugar a duda, el logro de Eudoxo es impresionante y tuvo una gran influencia en los siglos posteriores. Lo explicaré a continuación.

El enfoque de Eudoxo se explica y se entiende con más facilidad utilizando una formulación simbólica moderna: dadas dos razones de magnitudes comparables dos a dos A , B y C , D , se dice que están en proporción $A : B :: C : D$ si y solo si, dados dos enteros n y m cualesquiera, se cumple una de las siguientes condiciones:

(1) Si $mA > nB$ entonces $mC > nD$.

(2) Si $mA = nB$ entonces $mC = nD$.

(3) Si $mA < nB$ entonces $mC < nD$.

La definición original, puramente retórica, que aparece en los *Elementos* es mucho más difícil de seguir y fue claramente mucho más difícil de concebir, de formular en términos precisos y de usar en tiempos de los griegos. Al mismo tiempo, y a diferencia de las definiciones de razón o de punto que dio Euclides, esta sí se formuló para ser usada en demostraciones. Es importante que presentemos (al menos una vez) la definición original tal como aparece en el Libro V de los *Elementos*⁶:

Se dice que cuatro magnitudes están en la misma razón, la primera a la segunda y la tercera a la cuarta, si dado cualquier equimúltiplo⁷ de la primera y la tercera, y cualquier equimúltiplo de la segunda y la cuarta, los primeros equimúltiplos exceden ambos, son ambos iguales que o son ambos menores que los segundos equimúltiplos tomados en el orden correspondiente.

Nótese que, como los pitagóricos, Euclides también dice que las razones en cuestión son “las mismas” y no que una razón es “igual” a la otra. Una vez más, quiero enfatizar que esta diferencia terminológica no es superficial. Para Euclides, dos números podían ser iguales (si eran las mismas agrupaciones de cualquier unidad) y, en un sentido distinto, dos triángulos podían ser también iguales (si tenían la misma área). Pero las razones no eran números ni magnitudes. Compararlas no significaba comprobar que fuesen iguales en uno de los sentidos aceptados de la palabra, sino más bien si eran “las mismas”.

Para transformar la definición más bien engorrosa de proporción de Eudoxo en una herramienta matemática de valor práctico, el Libro V de los *Elementos* se dedicó precisamente a dar un número considerable de resultados significativos sobre las proporciones y su uso. Las generaciones posteriores de matemáticos, hasta el siglo XVII, continuaron usando todos estos resultados de forma muy efectiva como herramientas para probar enunciados nuevos y más complejos y para resolver problemas geométricos abiertos. Al mismo tiempo, esta teoría de proporciones tan útil y bien fundamentada contribuyó a perpetuar la separación conceptual entre números y razones.

Para dar una idea más clara de cómo los griegos y sus sucesores usaban el concepto de proporción en situaciones específicas, quiero presentar ahora dos ejemplos de proposiciones del Libro V de los *Elementos*. Empiezo con la proposición V.16, que en la edición de Heath dice así:

V.16: *Si cuatro magnitudes son proporcionales, también tienen que ser proporcionales de forma alterna.*

Utilizando un lenguaje simbólico que no existía en tiempos de Euclides se puede expresar así:

Dadas cuatro magnitudes del mismo tipo, a, b, c, d , si $a : b :: c : d$ entonces $a : c :: b : d$.

Desde un punto de vista moderno, esto parece un resultado trivial: la proporción se puede ver como la igualdad de fracciones $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, a partir de la cual con una simple operación obtenemos una segunda igualdad $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$. Pero Euclides, como ya sabemos, no podía usar este tipo de manipulación simbólica, y sus razones tampoco eran fracciones. En lugar de eso, tenía que aplicar la larga y

⁶Todas las citas de los *Elementos* de Euclides son de la edición de Heath.

⁷Dadas dos magnitudes diremos que otras dos son equimúltiplos de ellas si se obtienen multiplicando las dos por el mismo factor entero o, en otras palabras, repitiendo ambas el mismo número de veces. (N. de la T.)

engorrosa definición retórica de proporción a los dos pares a, b y c, d y demostrar que los dos pares a, c y b, d también satisfacen la propiedad que aparece en la definición. No es una tarea difícil, pero ciertamente hace falta una argumentación algo larga y verbosa que sería preferible no tener que repetir cada vez que se produce una situación como esta. Por este motivo Euclides dio este resultado como parte del conjunto de herramientas básicas de su tratado. El caso de la proposición V.18 es parecido:

V.18: *Si las magnitudes son proporcionales separando, también son proporcionales componiendo.*

En forma simbólica:

Si $a : b :: c : d$, entonces $a + b : b :: c + d : d$.

De nuevo, podemos estar tentados de recurrir a una simple demostración algebraica para esta identidad del estilo de la siguiente:

Como $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1$, y por tanto $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$.

Sin embargo Euclides no podía utilizar un argumento como este porque para él una razón no era una fracción con la que se pudiese operar. Las demostraciones euclidianas completas de V.16 y V.18 aparecen en el apéndice 3.2. Allí se puede ver en detalle cómo se puede usar la definición de Eudoxo para demostrar estos y otros resultados similares sin recurrir a manipulaciones simbólicas.

3.5 Los números fraccionarios griegos

Las razones y las proporciones eran, pues, una idea central en la matemática griega clásica. Si bien he intentado dejar claro que las razones no eran fracciones, no he querido decir que las “cantidades fraccionarias” no apareciesen de ninguna manera en la cultura matemática griega. De hecho aparecen, principalmente en cálculos encontrados en textos comerciales o astronómicos. Son diferentes de las razones y de las proporciones de las que acabamos de hablar, pero también de nuestra idea de fracción $\frac{p}{q}$. El concepto básico en el que se basan las cantidades fraccionarias griegas es similar al que nos lleva a concebir los números como grupos de unidades. Dentro de estos grupos están el par, el trío, el cuarteto, etc, y por eso, de la forma análoga, es posible considerar sus recíprocos, es decir, partes de la unidad como la mitad, el tercio, el cuarto y así sucesivamente. De forma paralela, también se puede extender fácilmente y de manera natural cualquier notación que tengamos para los números a una notación similar para sus recíprocos, sin que sea necesario disponer del concepto previo de fracción en el sentido moderno. Así, por ejemplo, si γ representa “el trío”, entonces su recíproco, “el tercio”, se puede denotar, por ejemplo, con la ayuda de un símbolo auxiliar como γ' , de forma que tendríamos $\gamma\gamma'$ (serviría cualquier otro indicador similar, como un punto superpuesto).

Como sucedía en las matemáticas egipcias, estos recíprocos no son realmente fracciones unitarias, no son casos particulares —en los que por alguna razón decidimos permitir solo el 1 como numerador— de una idea más general de fracción. En los textos comerciales griegos donde aparecen estos recíprocos, a menudo aparecen presentados como una sucesión ordenada que normalmente empieza (aparentemente por alguna razón histórica) con dos términos especiales, β y \angle , que representan, respectivamente, $\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{2}$. Continúa entonces con todos los recíprocos así $\beta', \angle', \gamma', \delta', \epsilon' \dots$

En los textos donde aparecen, estas “partes” griegas encontraron un lugar natural cuando era necesario hacer divisiones “inexactas”. Una expresión típica de este tipo es la siguiente:

El $\iota\zeta$ de $\iota\beta$ es $\angle\iota\beta\iota\zeta\lambda\delta\nu\acute{\alpha}\xi\eta$.

Matemática e Medida

Três momentos históricos

JOHN A. FOSSA (Organizador)

BERNADETE BARBOSA MOREY

GLENN W. ERICKSON

MARCELO SALLES BATARCE

ROSA LÚCIA SVERZUT BARONI

VANDERLEI M. DO NASCIMENTO

História da
Matemática
para Professores



Sociedade Brasileira de
História da Matemática

Livraria
da
Física

Editora

John A. Fossa (Organizador)
Bernadete Barbosa Morey
Glenn W. Erickson
Marcelo Salles Batarce
Rosa Lúcia Sverzut Baroni
Vanderlei Marcos do Nascimento

MATEMÁTICA E MEDIDA: Três momentos históricos



This One



3HNJ-KEE-BL9U

Obras protegidas por Direitos de Autor

Copyright © 2009 Editora Livraria da Física/SBHMat
1ª edição

Direção editorial José Roberto Marinho

**Coordenação geral da coleção História
da Matemática para professores** Iran Abreu Mendes

Diretoria SBHMat

Presidente: Sergio Nobre (UNESP)

Vice-Presidente: Clóvis Pereira da Silva (UFPR)

Secretário Geral: John Fossa (UFRN)

Tesoureiro: Iran Abreu Mendes (UFRN)

1º Secretário: Lígia Arantes Sad (UFES)

Membros Conselheiros: Antonio Carlos Brolezzi (USP)
Edilson Roberto Pacheco (UNICENTRO)

Conselho fiscal: Fernando Raul de Assis Neto (UFPE)
Marcos Vieira Teixeira (UNESP)
Maria Terezinha de Jesus Gaspar (UnB)

Conselho Editorial: Circe Mary Silva da Silva Dynnikov
Clóvis Pereira da Silva
John Andrew Fossa

Capa Ana Maria Hitomi – Typography

Projeto gráfico e diagramação Typography

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Matemática e medida : três momentos históricos. –
São Paulo: Editora Livraria da Física/SBHMat, 2009.

Vários autores.

John A. Fossa (organizador)

ISBN 978-85-7861-019-7

1. Matemática 2. Matemática - História

I. Fossa, John A.

09-00825

CDD-510.9

Índice para catálogo sistemático

1. Matemática : História 510.9

Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta obra poderá ser reproduzida
sejam quais forem os meios empregados sem a permissão da Editora.

Aos infratores aplicam-se as sanções previstas nos artigos 102, 104, 106 e 107
da Lei no 9.610, de 19 de fevereiro de 1998



Editora Livraria da Física
www.livrariadafisica.com.br

à suposição de que os segmentos que estão em proporção possuem uma medida comum. Eudoxo, dando um decisivo passo adiante, liberou-se desta restrição e introduziu a seguinte definição:

Diz-se que certas grandezas estão na mesma relação, a primeira para a segunda assim como a terceira para a quarta, se na multiplicação arbitrária dos múltiplos correspondentes da primeira e terceira são ao mesmo tempo ou maiores ou iguais ou menores que os múltiplos correspondentes da segunda e quarta, tomados respectivamente de dois em dois. [...] das grandezas que estão na mesma relação se dizem proporcionais. (WUSSING, 1998, p. 46).

Na linguagem atual, $a:b = c:d$ significa que para quaisquer números naturais $m, n \geq 1$ tem-se: $na > mb$ implica que $nc > md$; $na = mb$ implica que $nc = md$; $na < mb$ implica que $nc < md$. Para uma tal definição tinha de ser estabelecido primeiro o chamado *axioma de Arquimedes* ou *axioma de continuidade* (na verdade deveria ser chamado de axioma de Eudoxo), que nos Elementos de Euclides precede a definição anterior:

Diz-se que [duas] grandezas têm uma razão de uma para a outra se cada uma puder, quando multiplicada, exceder a outra. (STRUICK, 1992, p. 84).

A teoria de números irracionais atual, desenvolvida por Dedekind e Weierstrass, segue de perto as idéias de Eudoxo, utilizando os métodos da aritmética moderna o que, certamente, lhe abriram maiores perspectivas.

Em relação direta com a teoria das proporções e baseado no axioma acima, Eudoxo desenvolve um trabalho pioneiro na fundamentação de um particular tipo de análise que, no século 17, no auge das discussões sobre os infinitesimais, recebeu o nome de *método de exaustão*. Para introduzir esse método, Eudoxo apoiou-se numa propriedade que

Euclides, um dos matemáticos mais influentes de todos os tempos. Os seus textos mais famosos e mais avançados são os 13 livros que compõe os *Elementos*, escritos por volta de 300 a.C. Essa obra sistematizou quase a totalidade da matemática da época, mantendo-se fiel à ideologia platônica, não incluindo nenhuma referência às aplicações da matemática.

Para o estudo das medidas, a importância dessa obra destaca-se por ter deixado para a posteridade idéias importantes que poderiam ter se perdido, principalmente as de Eudoxo (teoria das proporções e método de exaustão). Além disso, dentre outras noções relativas às medidas, apresenta igualdade de áreas, construção de um quadrado de área igual à de um retângulo dado, o Teorema de Pitágoras e a secção de ouro, sendo esses dois últimos introduzidos como propriedades de áreas nos primeiros livros e retomados no livro 6 como teoremas relativos às razões de grandezas.

Com Arquimedes (287 – 212 a.C.), a matemática da Antigüidade alcançou seu ponto culminante. Ele viveu em Siracusa como conselheiro do rei Hierão e suas contribuições mais importantes na matemática foram feitas no domínio daquilo que hoje chamamos de cálculo integral – teoremas sobre áreas de figuras planas volumes de corpos sólidos. Por exemplo, na obra *Medição do Círculo* encontra uma aproximação da circunferência do círculo pelo uso de polígonos regulares inscritos e circunscritos, levando essa aproximação a polígonos de 96 lados, e encontra a seguinte estimativa para π :

$$3 \frac{10}{71} < \pi < 3 \frac{10}{70}$$

ou seja, π é aproximadamente $3 \frac{1}{7}$.

Na obra *Quadratura da parábola* Arquimedes obtém o cálculo exato da área delimitada por um segmento parabólico somando uma série geométrica infinita: trata-se de um típico resultado de cálculo integral.

Em outras obras trata de cálculo de comprimentos de curvas, áreas e volumes da esfera e setores, elipsóides e hiperbolóides

de rotação, etc. Em todos esses trabalhos, Arquimedes combinou originalidade e raciocínio com técnicas de cálculo e rigor nas demonstrações. É característica desse rigor o *Axioma de Arquimedes* citado anteriormente e o uso correto do método de exaustão para provar os resultados de suas integrações.

No período que segue Arquimedes até o fim da Antigüidade (por volta de 500 d.C.), podemos citar vários personagens que tiveram papel importante no desenvolvimento da matemática e, em especial, na astronomia e medidas: Apolonio de Perga ($\pm 247 - 205$ a.C.), Aristarco de Samos (280 a.C. ?), Eratóstenes de Cirene (por volta de 276 a 194 a.C.) e Hiparco de Nicéia (encontra-se dados sobre suas observações entre 141 e 127 a.C.) que influenciou fortemente, 300 anos depois, a obra *Almagesto* de Ptolomeu (150 d.C.). Também podemos citar Heron de Alexandria (viveu por volta de 100 d.C.), escreveu as obras *A Métrica* (sobre medição), *A Geométrica* (cálculo de áreas) e *Estereométrica* (cálculo de volumes) e se interessava por mensuração em todas as formas – na ótica, na mecânica e na geodésia²².

Diofanto de Alexandria (viveu em meados do século III d.C.) teve contribuições mais significativas no desenvolvimento da álgebra e Pappus de Alexandria (século IV d.C.), considerado o último matemático de destaque da Antigüidade, cuja obra *Coleção* (*Collectio*) era uma espécie de manual para o estudo da geometria grega, juntamente com anotações históricas, aperfeiçoamentos e alterações de teoremas e demonstrações. Muitos resultados de autores antigos são apenas conhecidos na forma na qual Pappus os conservou. Como exemplo, citamos os problemas relacionados com a quadratura do círculo, duplicação do cubo e trissecção de um ângulo, dos quais Pappus descreve algumas soluções e afirma ser impossível resolver esses

22 Geodésia é o termo utilizado por Boyer (1974, p. 124) para designar o estudo prático de configurações: "...Havia evidentemente dois níveis no estudo de configurações – comparáveis à distinção feita em contexto numérico entre aritmética (ou teoria dos números) e logística (ou técnica de computação) – uma era eminentemente racional, que podia ser chamada geometria e a outra, inteiramente prática, seria melhor chamada geodésia.

problemas sob as condições platônicas – provas rigorosas sobre essa afirmação só foram dadas no século XIX.

A escola de Alexandria foi desaparecendo gradualmente com o declínio da sociedade antiga tendo, nesse período, aparecido alguns comentadores que também deixaram marcas, como Proclus (410 – 485 d.C.), cujo *Comentário sobre o Primeiro Livro de Euclides* é uma das nossas principais fontes da história da matemática grega, Hypatia, cujo assassinato em 415 marcou o fim de Alexandria como centro matemático e Boécio, filósofo morto em 524 ou 525, cuja morte foi considerada um marco do fim da matemática antiga no Império Romano do Ocidente.

Em 529 d.C. as escolas filosóficas foram fechadas e seus membros procuraram asilo no Oriente. Daí por diante as sementes da ciência grega se desenvolveriam nos países do Oriente Próximo e do Extremo Oriente até que a matemática árabe começou a declinar e teve fim a idade média com a queda de Constantinopla perante os turcos, em 1453. E a ciência na Europa estava novamente em ascensão e preparada para aceitar a herança intelectual deixada por eras anteriores.

• Período Moderno

Do período medieval na Europa, vamos citar apenas o matemático Leonardo de Pisa (cerca de 1180 a 1250), mais conhecido como Fibonacci ou “filho de Bonaccio”, que não teve rival à sua altura nos 900 anos de cultura medieval européia. Ele foi o matemático mais original e capaz desse período e seu livro *O Liber abaci* contém o problema que inspirou futuros matemáticos e que deu origem à famosa *seqüência de Fibonacci*. Mas, sendo antes de tudo um algebrista, Fibonacci escreveu, também, em 1220, um livro sobre mensuração onde usava a álgebra para resolver problemas geométricos.

Durante o início do Renascimento (período posterior à Idade Média) foi desenvolvida uma matemática da mensuração, tanto do ponto de vista teórico como prático.

Matemáticas

y Matemáticos

José Ferreirós

Antonio Durán

(editores)



MATEMÁTICAS Y MATEMÁTICOS

**JOSÉ FERREIRÓS
ANTONIO DURÁN**
(editores)



S.A.E.M. "THALES"

SEVILLA, 2003

Serie: Colección Abierta
Núm: 66

Reservados todos los derechos. Ni la totalidad ni parte de este libro puede reproducirse o transmitirse por ningún procedimiento electrónico o mecánico, incluyendo fotocopia, grabación magnética o cualquier almacenamiento de información y sistema de recuperación, sin permiso escrito del Secretariado de Publicaciones de la Universidad de Sevilla.

© SECRETARIADO DE PUBLICACIONES
DE LA UNIVERSIDAD DE SEVILLA, 2003
Porvenir, 27 - 41013 Sevilla.
Tlfs.: 954 487 446; 954 487 451; Fax: 954 487 443
Correo electrónico: secpub2@us.es
<http://publius.cica.es>

© JOSÉ FERREIRÓS y ANTONIO DURÁN, (Eds.), 2003

Impreso en España-Printed in Spain
I.S.B.N.: 84-472-0810-9
Depósito Legal: SE-2.032-2004
Impresión: Pinelo Talleres Gráficos, S.L. Camas-Sevilla

inconmensurables (I 7) parece remitirse por reducción al absurdo al de las conmensurables anteriormente probado (I 6)¹⁵.

En fin, la teoría (3ª) de la proporción, la “euclidiana”, es la fundada en las deff. 3-5 y 7 del libro V de los *Elementos*. Por un lado, presupone “el postulado de Eudoxo” («sean a, b tales que $a < b$; entonces, hay un número n tal que $n \cdot a > b$ »), sienta la condición de homogeneidad entre las magnitudes que guardan razón (V def. 3) y remite esta relación a la multiplicación (V def. 4), amén de modular el criterio eudoxiano de proporción (V def. 5, prop. 11). Por otro lado, enriquece este legado con la definición expresa de la razón mayor ($a : b > c : d$ si $m \cdot a > n \cdot b$ pero $m \cdot c \leq n \cdot d$ [V def. 7]), una aportación que le permite demostrar la proporcionalidad o igualdad de razones por reducción al absurdo de las alternativas de no proporción, i. e. los casos de razón mayor o de razón menor, en una extensión de la tricotomía a las razones.

Para terminar con este punto de las teorías clásicas de la proporción, añadiré tres conjeturas que me parecen razonables: (i) la teoría “antiferética” –aparte de otros servicios luego asimilados y desarrollados por Euclides– pudo alumbrar casos de inconmensurabilidad pero no tratarlos satisfactoriamente; (ii) tanto la alternativa “eudoxiana” como su ulterior variante “euclidiana” vinieron a sustituirla en razón de su mayor alcance conceptual y de su mayor rigor y poder de prueba; (iii) Arquímedes parece haber mantenido, en algunos supuestos de su trabajo matemático, una relación más directa con las contribuciones originales de Eudoxo que con la revisión de Euclides –más aún, es probable que su formación matemática inicial estuviera más ligada a la investigación de Eudoxo que a la refundición sistemática de Euclides y los alejandrinos¹⁶. Puede que esta impresión se confirme al considerar el otro punto, el relativo a los usos del método de convergencia y a las formulaciones “euclidiana” y “arquimediana” del principio de bisección.

Pasaré ahora por alto los usos del método y su presunta prehistoria, en la que habrían confluído los intentos más o menos afortunados de

15. El texto de la proposición I 7 de *PE* es deficiente y ha suscitado no pocas discusiones. Me atengo a la interpretación propuesta por W.R. Knorr, “Archimedes and the pre-euclidean proportion theory”, *Archives Intern. Hist. Sciences*, 28 (1978), 183-244; Knorr también ofrece (p. 184) la alternativa “euclidiana” de una prueba conjunta de las proposiciones 6 y 7.

16. Knorr (1978) se ha servido de esta hipótesis para una reordenación cronológica de las obras que hoy conservamos de Arquímedes. Otro posible indicio en favor de su “filiación eudoxiana” sería la dedicación de su padre, Fidias, a la astronomía, en donde Eudoxo también había dejado una huella fundacional reconocida. Cabe pensar que Fidias iniciara a Arquímedes en el trato con la familia de las disciplinas matemáticas (aritmética, geometría, astronomía: ciencias “hermanas” según había sugerido Arquitas) y que desempeñara un papel de mediador generacional entre Eudoxo y Arquímedes.

cuadraturas (Hipócrates, Antifón, Bryson) y los problemas relacionados con la continuidad y los indivisibles (e.g. la paradoja de Demócrito)¹⁷. Bastará recordar que el procedimiento se aplica a la determinación de áreas y volúmenes por equivalencia o proporción con unas magnitudes poligonales dadas, mediante la reducción al absurdo de las hipótesis contrarias, a saber: que la magnitud de, o la razón entre, las figuras o sólidos que se trata de establecer sea mayor o sea menor que la magnitud de, o la razón establecida entre, los objetos rectilíneos de referencia (así, dos círculos guardan entre sí la misma razón que los cuadrados de sus diámetros, habida cuenta de que la suposición de que guardaran una razón mayor o una menor conduciría a algo imposible en el contexto teórico dado, e.g. a la violación del principio de tricotomía). La idea es determinar la magnitud de una figura curvilínea F por la construcción de dos series monótonas, una creciente de polígonos inscritos y otra decreciente de polígonos circunscritos, que convergen en una magnitud equivalente o proporcional a la de F sobre el supuesto de un principio de bisección a tenor del cual sus respectivas diferencias pueden hacerse menores que cualquier magnitud finita dada. Al parecer, los primeros usos del método (en Eudoxo; en los *Elementos*, XII; en la *Cuadratura de la parábola*, 24) sólo consideraban series de polígonos regulares inscritos que crecían por duplicación sucesiva de sus lados. Según el propio Arquímedes declara a Dositeo en el prefacio de la *Cuadratura de la parábola*, los geómetras anteriores habían llegado por el uso tácito de ese supuesto de bisección a resultados como: los círculos guardan entre sí la razón duplicada de sus diámetros; las esferas, la razón triplicada; toda pirámide es el tercio de un prisma con la misma base e igual altura; todo cono es el tercio de un cilindro con la misma base e igual altura –cf. *Elementos* XII 2, 7 por., 10, 18. Pero lo que importa es el modo de conceptualizar y fundar el procedimiento.

Aristóteles, en el contexto de su discusión sobre magnitudes y fuerzas finitas e infinitas (*Física*, VIII 10), ya aducía que «[i] al agregarle siempre algo a lo finito excederemos a toda magnitud finita; y parejamente [ii] al sustraerle algo, tendremos que llegar a una magnitud menor que una finita dada» (266^b2-4). Leamos las dos tesis como preludio de la base teórica del método de convergencia: [i] anunciaría o bien el postulado de Eudoxo y su desarrollo ulterior como lema o asunción sobre diferencias en Arquímedes,

17. Sobre los diversos usos del método por parte de Arquímedes, vid. el clásico E.J. Dijksterhuis (1956), *Archimedes*, Princeton (NJ), Princeton U.P., 1987. Sobre su prehistoria cf. W.R. Knorr, "Infinity and continuity: the interaction of mathematics and philosophy in the antiquity", y I. Mueller, "Aristotle and the quadrature of the circle", en N. Kretzmann, ed. *Infinity and continuity in ancient and medieval thought*, Ithaca/London, Cornell U.P., 1982, pp. 112-145 y 146-164 respectivamente.

o bien las deff. 3-4 del V de los *Elementos*, mientras que [ii] apuntaría el principio de bisección expresamente establecido en *Elementos* X 1.

Recordemos este aparato conceptual a partir de los *Elementos*.

V, def. 3: «Una razón es determinada relación con respecto al tamaño entre dos magnitudes homogéneas.»

V, def. 4: «Se dice que guardan razón entre sí las magnitudes que, al multiplicarse, pueden exceder una a otra.»

V, def. 5: «Se dice que una primera magnitud guarda la misma razón con una segunda que una tercera con una cuarta, cuando cualesquiera equimúltiplos de la primera y la tercera excedan a la par, sean iguales a la par o resulten inferiores a la par que cualesquiera equimúltiplos de la segunda y la cuarta, respectivamente y tomados en el orden correspondiente.»

V, def. 7: «Entre los equimúltiplos, cuando el múltiplo de la primera excede al múltiplo de la segunda, pero el múltiplo de la tercera no excede al múltiplo de la cuarta, entonces se dice que la primera guarda con la segunda una razón mayor que la tercera con la cuarta.»

Sobre esta base –en especial, V deff. 3 y 4– se establece el teorema de bisección:

X 1: «Dadas dos magnitudes desiguales, si se quita de la mayor una magnitud mayor que su mitad y, de la que queda, una magnitud mayor que su mitad y así sucesivamente, quedará una magnitud que será menor que la magnitud menor dada. <...> De manera semejante demostraríamos que [esto ocurre] también si se quita la mitad.»

Por el otro lado, contamos con el llamado “postulado de Eudoxo”:

«dadas unas magnitudes a, b tales que $a < b$, hay un número n tal que $n \cdot a > b$.»

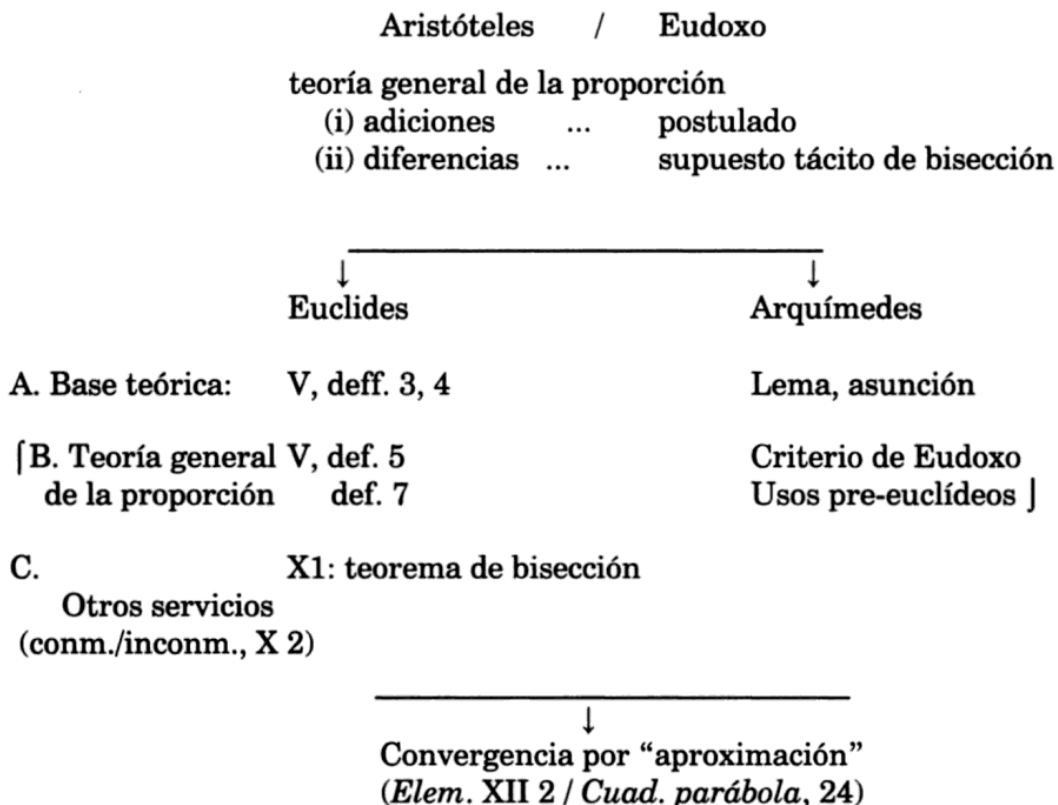
y con dos variantes de la base teórica de la bisección propuestas por Arquímedes:

Prefacio de *Cuadratura de la parábola*, lema: «El exceso de la mayor de dos áreas desiguales sobre la menor [es una magnitud que] puede sobrepasar, si es añadida a sí misma [cuantas veces sea preciso], cualquier área finita dada.»

Sobre la esfera y el cilindro, asunción 5^a: «De dos líneas o superficies o sólidos desiguales, la mayor excede a la menor en una magnitud que, añadida a sí misma, puede exceder cualquier magnitud dada de entre [o del tipo de] las comparadas.» Cf. también el final del prefacio de *Sobre espirales*.

Hay sutiles diferencias entre ambos planteamientos. Euclides explicita la condición de homogeneidad para las magnitudes que guardan razón entre sí –habrán de ser del mismo tipo o de la misma dimensión– y sienta el principio de bisección como un teorema probado; a esta proposición X 1 apela en su uso del método en XII 2, «los círculos son entre sí como los cuadrados de sus diámetros» –reparemos, de paso, en que esta formulación difiere de la de Arquímedes, quien emplea la expresión pre-euclídea de “razón duplicada” en vez de la referencia a “cuadrados”. A su vez, el postulado de Eudoxo declara un supuesto de existencia implícito en el uso efectivo de V, def. 4. Pero más importancia revisten las precisiones de Arquímedes a la base representada por V, deffs. 3-4. Su lema o asunción añade a la consideración euclídea de la multiplicación o la aditividad el caso de los excesos o las diferencias y envuelve dos condiciones a este respecto: (1) la diferencia entre magnitudes es una magnitud, y (2) es del mismo tipo o dimensión que las comparadas. Sin embargo, parece ignorar la existencia de una prueba del principio de bisección en la línea de X 1, como, según todos los visos, también le había ocurrido a Eudoxo y a los geómetras aludidos en el prefacio de la *Cuadratura de la parábola*.

En resumen, nos encontramos ante una situación como la representada en este esquema:



MATERIALES DE HISTORIA DE LA CIENCIA

LOS ORÍGENES DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA



Pedro Miguel
González Urbaneja

6

FUNDACIÓN CANARIA OROTAVA DE HISTORIA DE LA CIENCIA

© FUNDACIÓN CANARIA OROTAVA DE HISTORIA DE LA CIENCIA

ISBN 84-
Depósito legal *

FUNDACIÓN CANARIA OROTAVA DE HISTORIA DE LA CIENCIA
C/ Calvario, 17, 38300 La Orotava, Tenerife
Tfno. 922-322862 E-Mail: fundoro@terra.es

o bien

Copyrighted image

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}, \quad x^2 = a \cdot b$$

No obstante la inseguridad provocada por las magnitudes inconmensurables, condujo al intento de evitar a toda costa el uso de razones en la Geometría elemental. Por eso el tratamiento de ecuaciones tan sencillas como $a \cdot x = b \cdot y$ y $x^2 = a \cdot b$, en forma de proporción, tiene lugar, como hemos visto, en el Libro VI de Los Elementos de Euclides, es decir, se retrasa hasta después de desarrollar la Teoría de la Proporción de Eudoxo en el libro V.

Con anterioridad al Libro VI de Los Elementos de Euclides la ecuación $a \cdot x = b \cdot y$, por ejemplo, se considera como la expresión de la igualdad de las áreas $a \cdot x$, $b \cdot y$, más que como una proporción o igualdad entre las razones a/b , c/x , y en consecuencia se construye la cuarta proporcional x , utilizando un caso particular de Euclides I.45: «Construir sobre una recta dada, y con un ángulo rectilíneo dado, un paralelogramo equivalente a una figura dada», que es el primer problema de Aplicación de las Áreas, que aparece en Los Elementos de Euclides.

En este caso el problema sería:

«Construir sobre un segmento dado a , un rectángulo equivalente a otro rectángulo $b \cdot c$.»

C

Copyrighted image

S

I

$$OB = b, \quad OC = c, \quad \angle O = A$$

$$a \cdot x = b \cdot c$$

$$\Omega O A \Omega R S O C D B$$

$$x = CP$$

Consideremos el rectángulo OCDB de lados $OB = b$ y $OC = c$ y llevemos sobre OC un segmento $OA = a$. Completamos el rectángulo OAEB y tracemos la diagonal OE que corta a CD en P. Entonces CP es el segmento buscado x , ya que el rectángulo OARS tiene el mismo área que el rectángulo OCDB.

La parte más importante del Álgebra Geométrica de los griegos se encuentra en el Libro II de Los Elementos de Euclides, que con sólo catorce proposiciones es uno de los más cortos. En la actualidad su contenido no juega ningún papel fundamental en los libros de texto modernos. Sin embargo en la Geometría griega el Libro II ejerce una función primordial. La discrepancia radical entre los puntos de vista griego y

3 | EL ÁLGEBRA GEOMÉTRICA DE LOS ELEMENTOS DE EUCLIDES

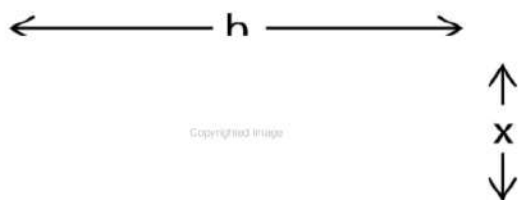
Como consecuencia de la aparición de las magnitudes inconmensurables, los griegos no podían reconocer la existencia de números irracionales, lo que les dificultaba el tratamiento numérico de longitudes, áreas, volúmenes y ángulos. Esta limitación operacional junto a un deficiente sistema de numeración que utilizaba las letras del alfabeto para representar los números enteros, con la consiguiente dificultad para realizar las operaciones, impedía asignar a las figuras geométricas números que midieran sus longitudes, áreas y volúmenes y por tanto los griegos tenían que tratar directamente con las figuras a modo de magnitudes. El abismo infranqueable que se había abierto entre número y magnitud continua impedía someter las magnitudes geométricas a manipulaciones algebraicas, como se hace con los números, lo que determinó la transformación del Álgebra oriental que los pitagóricos ha-

bían heredado de los babilonios en el Álgebra Geométrica del Libro II de Los Elementos de Euclides que juega un papel fundamental en la Geometría griega. Con gran habilidad en la práctica geométrica, los griegos hicieron de su Álgebra Geométrica un poderoso instrumento para la resolución de ecuaciones, mediante el método de la Aplicación de las Áreas, teoría que según Proclo sería de ascendencia pitagórica.

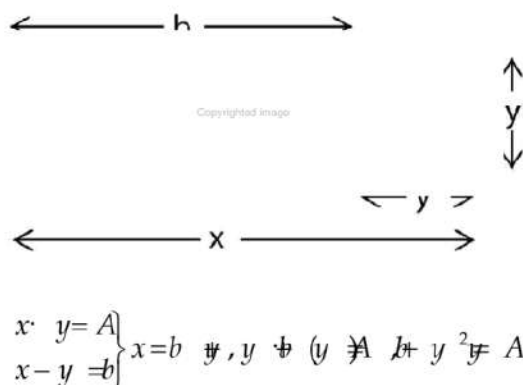
El Álgebra Geométrica, denominación acuñada por el historiador de la Matemática H.G. Zeuthen (1839-1920) hacia 1886, viene a ser una geometrización de los métodos algebraicos practicados por los babilónicos, una especie de Geometría Algebraica, en la que los números son sustituidos por segmentos de recta y las operaciones entre ellos se llevan a cabo (respetando escrupulosamente la homogeneidad de los términos) mediante construcciones geométricas de la siguiente forma:

- La suma de dos números se obtiene prolongando sobre el primero un segmento igual al segundo.
- La diferencia de dos números se obtiene recortando del primero un segmento igual al segundo.
- El producto de dos números es el área del rectángulo cuyos lados tienen como longitudes esos números.
- El cociente de dos números es la razón de los segmentos que los representan (según los principios del libro V de Los Elementos de Euclides).
- La suma y la diferencia de productos se reemplaza por la adición y la sustracción de rectángulos.
- La extracción de una raíz cuadrada se establece mediante la construcción de un cuadrado de área equivalente a la de un rectángulo dado (Euclides II.14)

Por ejemplo, el viejo problema mesopotámico en el que dada la suma o diferencia y el producto de los lados de un rectángulo, $x \cdot y = A$, $x \pm y = b$, se pedía hallar dichos lados, se interpretaba geoméricamente de la siguiente forma:



$$\begin{cases} x \cdot y = A \\ x + y = b \end{cases} \Rightarrow y = b - x, x \cdot (b - x) = A \Rightarrow b \cdot x - x^2 = A$$



La solución geométrica lleva a la construcción sobre un segmento b de un rectángulo cuya altura desconocida x debe ser tal que el área del rectángulo en cuestión exceda del área dada A (en el caso de signo positivo) en el cuadrado de lado x ; o difiera del área dada (en el caso de signo negativo) en el cuadrado de lado y .

En su Álgebra Geométrica los griegos utilizaron principalmente dos métodos para resolver cierto tipo de ecuaciones, el método de las proporciones y el método de Aplicación de las Áreas. El método de las proporciones permite construir exactamente, como se hace hoy, un segmento de línea x dado por:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}, \quad a = \cdot x \cdot b \cdot$$

Cuarta proporcional (Euclides VI.12)

moderno estriba en que hoy nosotros podemos disponer de un Álgebra simbólica y una Trigonometría, que han sustituido completamente a sus equivalentes geométricos clásicos, precisamente gracias a las Geometrías de Fermat y Descartes, que aplicando la naturaleza algorítmica del Álgebra a los problemas geométricos alumbraron sus Geometrías Analíticas.

Mientras nosotros representamos las magnitudes con letras que se sobreentiende son números conocidos o desconocidos, con las cuales operamos mediante las reglas algorítmicas del Álgebra, los griegos representaban las magnitudes rectilíneas mediante segmentos de línea recta que debían obedecer a los axiomas y teoremas de la Geometría. Con estos elementos los griegos disponían de un Álgebra (Geométrica) que cumplía a todos los efectos las mismas funciones que nuestra moderna Álgebra simbólica. Ciertamente es que el Álgebra moderna con su cálculo literal facilita de forma considerable la manipulación de las operaciones y las relaciones entre magnitudes geométricas, pero no es menos cierto que con su Álgebra Geométrica los griegos eran mucho más hábiles que nosotros en la práctica geométrica. Y es que el Álgebra Geométrica griega sorprende al estudioso moderno por ser bas-

tante difícil y artificiosa, pero los griegos la utilizaron con soltura y para ellos debió ser una herramienta de utilización necesaria, básica y cómoda.

La evidencia visual de los teoremas aludidos en la actividad que se propone a continuación es, para un estudioso griego, muy superior a su contrapartida algebraica para un estudiante actual. Claro está que la demostración rigurosa de Euclides de cada una de estas proposiciones puede ocupar más de una página, pero ¿cuántos estudiantes de Enseñanza Secundaria podrían dar actual-

Copyrighted image

mente una demostración detallada y rigurosa de estas reglas algebraicas que con tanta soltura aplican?

Para explicar de forma más efectiva el método de la aplicación de las áreas, consideremos un segmento de línea AB y un paralelogramo AQRS cuyo lado AQ está a lo largo de AB:

Copyrighted image

1. Cuando Q coincide con B, se dice que «el paralelogramo AQRS se ha aplicado sobre el segmento AB».
2. Cuando Q está entre A y B, se dice que «el paralelogramo AQRS se ha aplicado sobre el segmento AB de forma elíptica o con defecto el paralelogramo QBCR».
3. Cuando Q está en la prolongación de AB, se dice que «el paralelogramo AQRS se ha aplicado sobre el segmento AB de forma hiperbólica o con exceso el paralelogramo QBCR».

Por ejemplo, la Proposición Euclides I.44 es un caso de aplicación del tipo 1.

Volviendo a la Proposición II.5 de Los Elementos de Euclides, para su demostración consideremos la figura siguiente:

Copyrighted image

+

-

Sea AB el segmento de línea recta dado, dividido de forma igual por C y de forma desigual por D, la proposición establece que: $AD \cdot DB + CD^2 = CB^2$.

Tomando $AB=2a$, $AC=a$, $CD=b$, resulta la identidad algebraica:

$$(a + b) \cdot (a-b) + b^2 = a^2$$

Simplificando el lenguaje retórico de Euclides tenemos:

$$\begin{aligned} AD \cdot DB + CD^2 &= AKHD + LEGH = \\ &= AKLC + CLHD + LEGH = \\ &= CLMB + CLHD + LEGH = \\ &= CLMB + HGFM + LEGH = CB^2. \end{aligned}$$

Digamos que más importante que la demostración exhibida, es el diagrama que utiliza Euclides en esta demostración y en la de las proposiciones siguientes, porque son esquemas gráficos que jugarían un papel fundamental en la resolución geométrica de ecuaciones cuadráticas.

En efecto: sea resolver en la Geometría griega la ecuación $ax-x^2=b^2$, es decir, encontrar un segmento de línea x que cumpla la condición expresada por la ecuación $ax-x^2=b^2$, donde a,b son segmentos tales que $a>2b$.

Sea ahora $AB=a$, y sea C el punto medio de AB, levantemos por C una perpendicular CP de longitud igual a b. Con centro en P y radio $a/2$ tracemos una circunferencia que corte a AB en el punto D.

Construyamos sobre AB un rectángulo ABMK de anchura $BM=BD$ y completamos el cuadrado BDHM. Este cuadrado es el área x^2 que cumple la condición expresada por la ecuación cuadrática. En lenguaje griego de la Aplicación de las Áreas se ha aplicado de

forma elíptica al segmento $AB=a$ un rectángulo AH de área $(a-x) \cdot x$, es decir $ax-x^2$, que es igual a un cuadrado dado b^2 , y que es deficiente del rectángulo AM en un cuadrado DM . La demostración de este hecho viene dada por la Proposición Euclides II.5, según la cual el rectángulo $ADHK$ es igual al polígono cóncavo $CBFGHL$, es decir, difiere de $(a/2)^2$ en el cuadrado $LHGE$ cuyo lado es por construcción $CD = \left[\sqrt{\left(\frac{a}{2} \right)^2 + b^2} \right] b$.

Copyrighted image

1.

Sintetizando los cálculos geométricos:

$AB=a$, $AC=CB$

$CP=b$, $PD=a/2$, $LH=CD = \left[\sqrt{\left(\frac{a}{2} \right)^2 + b^2} \right] b$.

Rectángulo $ABMK$ ($BM=BD$)

Cuadrado $BDHM = x^2$.

Euclides II.5: $AD \cdot DB + CD^2 = CB^2$.

$ADHK + LHGE = CBFE$,

$ADHK = ABMK - BDHM$,

$ADHK = CBFE - LHGE$,

$ABMK - BDHM = CBFE - LHGE$

$ax - x^2 = (a/2)^2 - \left[\sqrt{\left(\frac{a}{2} \right)^2 + b^2} \right]^2 = b^2$.

De manera similar se resuelve la ecuación cuadrática $ax+x^2=b^2$ mediante la Proposición II.6 de Los Elementos de Euclides:

«Si se divide una recta en dos partes iguales y se prolonga, el rectángulo comprendido por la recta entera, más la prolongación, y por la prolongación, junto con el cuadrado de la recta mitad, es equivalen-

te al cuadrado de la recta formada por la recta mitad y la prolongación».

En este caso se trata de aplicar de forma hiperbólica a una línea recta dada $AB=a$, un rectángulo $AM=ax+x^2$, que sea igual a un cuadrado dado b^2 y que exceda al rectángulo AH en un cuadrado x^2 .

Sea C el punto medio de AB , levantemos por C una perpendicular CP de longitud igual a b . Con centro en C y radio PB tracemos una circunferencia que corte a AB en el punto D .

Esta vez la distancia es

$$CD=PB = \sqrt{\left(\frac{a}{2} \right)^2 + b^2}$$

y como por la proposición se sabe que el rectángulo $AM=ax+x^2$ más el cuadrado $LG=(a/2)^2$ es igual al cuadrado $CF=(a/2)^2+b^2$, se verifica la condición de la ecuación $ax+x^2=b^2$.

Sintetizando los cálculos geométricos:

$AB=a$, $AC=CB$

$CP=b$, $CD=PB = \left[\sqrt{\left(\frac{a}{2} \right)^2 + b^2} \right] b$.

Rectángulo $ADMK$ ($BM=BD$)

Cuadrado $BDHM = x^2$.

Euclides II.6: $ADMK + LHGE = CDFE$.

$ADMK = CDFE - LHGE$,

$ADMK = ABHK + BDMH$,

$ABHK + BDMH = CDFE - LHGE$

$ax + x^2 = \left[\sqrt{\left(\frac{a}{2} \right)^2 + b^2} \right]^2 - (a/2)^2 = b^2$.

1

1

Copyrighted image

En la Proposición II.11 de Los Elementos, Euclides trata un problema muy importante ya que tiene relación con la sección áurea y que es un caso particular de la II.6, equivalente a la resolución de la ecuación $ax+x^2=a^2$.

«Dividir una recta en dos partes de modo que el rectángulo comprendido por la recta entera y por una de sus partes sea equivalente al cuadrado de la otra parte».

Se traza el cuadrado ABCD de lado a , se halla el punto medio E del lado AD, se traza EB y se extiende el lado DA hasta F de forma que $EF=EB$; se completa el cuadrado AFGH y se extiende GH hasta que corte a DC en K. Así se consigue aplicar al segmento AD un rectángulo $FK=ax+x^2$ igual al cuadrado dado $AC=a^2$, y que lo excede en un cuadrado x^2 .

Copyrighted image

I

U

B

Sintetizando los cálculos geométricos:

Cuadrado ABCD, $AD=a$

$AE=ED$, $EF=EB$

Cuadrado AFGH = x^2

Euclides II.11: $DFGK = ABCD$

$DFGK = DAHK + AFGH$

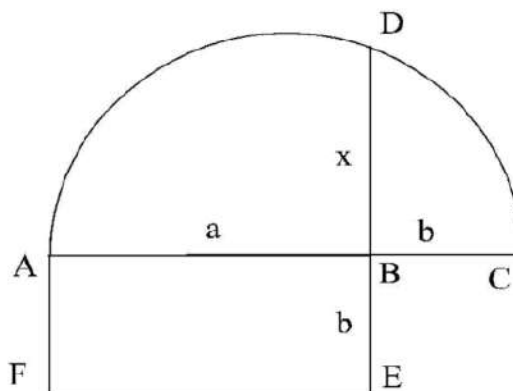
$DAHK + AFGH = ABCD$

$ax+x^2=a^2$

El Libro II de Los Elementos de Euclides termina con una importante Proposición(Euclides II.14):

«Construir un cuadrado equivalente a una figura rectilínea dada».

Con este teorema Euclides enseña a cuadrar cualquier figura poligonal, de manera que queda establecida la posibilidad de tratar las figuras poligonales como magnitudes, de ahí la importancia de la Proposición en la Teoría del magnitudes del Libro V.



En la demostración Euclides reduce el problema mediante la Proposición I.44 a que la figura poligonal sea un rectángulo ABEF. Se prolonga AB hasta C de forma que $BC=BE$; se construye un círculo con diámetro AC y se traza la perpendicular DB. El cuadrado buscado es el que tiene por lado el segmento DB.

El teorema es equivalente a la resolución geométrica de la ecuación $x^2=a \cdot b$.

La Aplicación de las Áreas se convirtió para los griegos en una de las técnicas más importantes en Geometría, constituyendo un Álgebra Geométrica, como útil instrumento de resolución de ecuaciones. En principio debió de ser

Copyrighted image

de 75-125 d.C. Contiene el enunciado en griego y una figura auxiliar de la proposición II.5. Es quizá el más antiguo resto de diagramas de proposiciones de Los Elementos de Euclides.

ideado para sustituir al método de las proporciones, ya que el descubrimiento de las magnitudes inconmensurables hizo prácticamente inviable el uso de las mismas en el tratamiento de los problemas geométricos, hasta la introducción por Eudoxo de la Teoría general de la Proporción, plasmada en el Libro V de Los Elementos de Euclides. Las bases firmes de esta teoría permiten a Euclides en las Proposiciones 27, 28 y 29 del Libro VI, una generalización del método de Aplicación de las Áreas, donde el libre uso del concepto de semejanza facilita la sustitución de los rectángulos del Libro II por paralelogramos, permitiendo aplicar a un segmento dado un paralelogramo igual a una figura rectilínea dada y que exceda o sea deficiente en un paralelogramo semejante a otro dado. Las construcciones correspondientes como las de las Proposiciones II.5, II.6 son en la práctica soluciones geométricas de las ecuaciones cuadráticas $ax \pm x^2 = bx$, sometidas a la restricción geométrica equivalente a que el discriminante sea no negativo, es decir, las aludidas Proposiciones VI.27, VI.28 y VI.29 son una especie de contrapartida geométrica de la forma

algebraica más generalizada de ecuaciones cuadráticas con raíz real y positiva.

Además, desde el punto de vista histórico la aplicación de las áreas está en el punto de partida de la teoría de Apolonio (162-190 a.C.) de las secciones cónicas. De hecho los tres nombres acuñados por Apolonio para las cónicas no degeneradas provienen de la denominación de los tres tipos de aplicación de las áreas: elíptico (dado un segmento construir sobre una parte de él o sobre él mismo extendido, un paralelogramo igual en área a una figura rectilínea dada y resultando deficiente

Copyrighted image

Euclides a los pies de la Geometría (Colección Cambó de Barcelona).

MATERIALES DE HISTORIA DE LA CIENCIA

en un paralelogramo semejante a uno dado), hiperbólico (idem. resultando excedente) y parabólico (idem. resultando igual). Así lo asegura Proclo al final de su resumen histórico (Comentarios al Libro I de Los Elementos de Euclides, 419, 15-420, 23):

«Estas cosas, según Eudemo, son antiguas y fueron invención de la Musa de los pitagóricos, quiero decir la aplicación de áreas por yuxtaposición (forma parabólica), por exceso (forma hiperbólica) y por defecto (forma elíptica). Los geómetras posteriores tomaron estas denominaciones de los pitagóricos y las trasladaron a las

líneas llamadas cónicas, de modo que una de ellas nombra la parábola, otra la hipérbola y otra la elipse, mientras que los hombres de la Antigüedad, semejantes a dioses, veían que estos términos significaban la construcción de áreas, en el plano, sobre una línea recta finita. Pues cuando se tiene una línea recta y se extiende el área a todo lo largo de la línea, dicen que se aplica o yuxtapone el área; pero cuando se hace la longitud del área mayor que la propia línea recta, dicen que la excede, y cuando se hace menor, en cuyo caso hay alguna parte de la línea recta que sobrepasa el área trazada, entonces dicen que es deficiente.»

SYNTHESE LIBRARY / VOLUME 61

FOR DIRK STRUIK

*Scientific, Historical and Political Essays
in Honor of Dirk J. Struik*

Edited by R. S. Cohen, J. J. Stachel, and M. W. Wartofsky

BOSTON STUDIES IN THE PHILOSOPHY OF SCIENCE
VOLUME XV

Edited by Robert S. Cohen and Marx W. Wartofsky



D. REIDEL PUBLISHING COMPANY
DORDRECHT-HOLLAND / BOSTON-U.S.A.

BOSTON STUDIES IN THE PHILOSOPHY OF SCIENCE

EDITED BY ROBERT S. COHEN AND MARX W. WARTOFSKY

VOLUME XV

FOR DIRK STRUIK

*Scientific, Historical and Political Essays
in Honor of Dirk J. Struik*

Edited by

R. S. COHEN, J. J. STACHEL, AND M. W. WARTOFSKY



D. REIDEL PUBLISHING COMPANY

DORDRECHT-HOLLAND / BOSTON-U.S.A.

Library of Congress Catalog Card Number 73-83556

ISBN-13: 978-90-277-0379-8

e-ISBN-13: 978-94-010-2115-9

DOI: 10.1007/978-94-010-2115-9

**Published by D. Reidel Publishing Company,
P.O. Box 17, Dordrecht, Holland**

**Sold and distributed in the U.S.A., Canada and Mexico
by D. Reidel Publishing Company, Inc.
306 Dartmouth Street, Boston,
Mass. 02116, U.S.A.**

All Rights Reserved

Copyright © 1974 by D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland

Softcover reprint of the hardcover 1st edition 1974

**No part of this book may be reproduced in any form, by print, photoprint, microfilm,
or any other means, without written permission from the publisher**

As to these problems Dedekind's theory of cuts essentially differs methodologically from Eudoxus' theory of ratios. It defines the idea of cut clearly and explicitly and it consequently establishes the relations of ordering and counting operations with the cuts, and it is only on the basis of this that it regards the cut as a real number.

But though Eudoxus' theory of ratios cannot be regarded as a theory of real numbers in the sense of Dedekind's theory of cuts nor the system of Eudoxus' ratios regarded as a system of numbers, nevertheless if Eudoxus' ratio is called a number, if it is marked by a symbol letter and submitted to the determinate rules of counting operations, this theory will differ considerably less from the modern theory of real number than it appears at the first sight.

5. Eudoxus' theory of ratios, as a theory of real numbers of the ancient epoch, lacked the axiom of continuity with a clear and explicit formulation though the mathematicians of Eudoxus' times had anticipated it in a milder form by the postulate of the existence of the fourth proportional which nowhere has been explicitly said, but which applies its implications in many considerations.

Dedekind noticed the very great importance of the axiom of continuity and came to the conclusion that it was indispensable explicitly to define the axiom in the complex of the theory of real numbers.

6. From the mathematical point of view there is a certain analogy of the historical situations in which both Eudoxus' theory of ratios and Dedekind's theory of cuts appeared.

Eudoxus' theory of ratios originated in a situation created by the Pythagorean discovery of the existence of incommensurable magnitudes, the ratio of which is not the quotient of integers, but more exactly of natural numbers. The discovery shook to the very ground the conception, up to then in force, of geometrical figures as the finite sums of points, and with all its rigour it put forth the problem of measuring continuous geometrical magnitudes: segments, areas and volumes. This problem led the mathematics of Eudoxus' epoch to full understanding that there exist ratios of geometrical magnitudes which could not be directly represented by a pair of integers, and Eudoxus, at any rate conscious of this fact, showed by means of his theory how such ratios could also be indirectly included in integral proportions. In that way the system of ratios of commensurable magnitudes supplemented the system of incommensu-

rable magnitudes, that in the modern arithmetical sense means that he reduced the theory of irrational numbers to the theory of rational numbers, with all the limitations and defects due to the general development of mathematics in his epoch.

Dedekind's theory of cuts originated in a situation created by a boisterous development of infinitesimal analysis when the exact determination of the content of its most important ideas, such as function, continuous and discontinuous, derivative and integral and many others, demanded a precise determination of the idea of irrational and real number in general and construction of an arithmetical continuum of numbers, as an infallable basis of infinitesimal analysis. Taking this into account Dedekind filled the gaps of the system of rational numbers with his theory and satisfied strictly the demand for a strict foundation of the infinitesimal analysis as put forth by the mathematics of his time.

The mathematics of Eudoxus' and Dedekind's times, each in its own way brought up to the surface the problems which were directly connected with the nature of geometrical and arithmetical continua. In the analogy of the mathematical situations mentioned above there fall in a great deal of the causes of the analogy of Eudoxus' and Dedekind's theories, so distant in time, but so near in their conceptions, so that a picturesque comparison may be made according to which Eudoxus was Dedekind of the (ancient) epoch and Dedekind was the Eudoxus of the modern one.

Belgrade, Jugoslavia

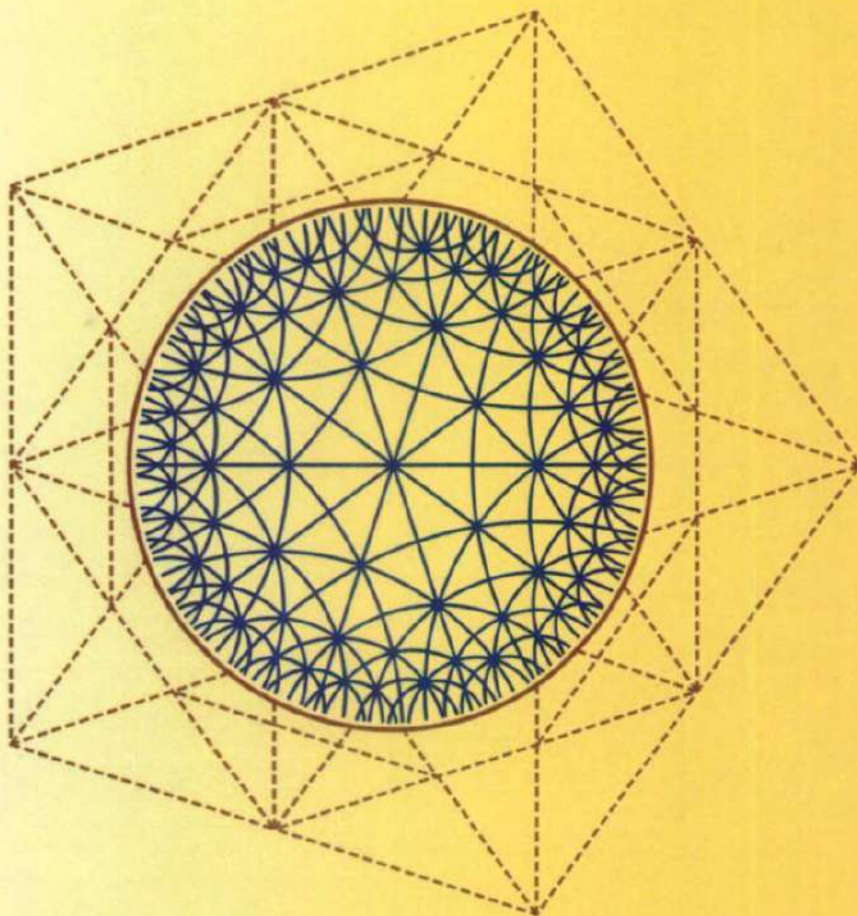
BIBLIOGRAPHY

- Arnold, I. V., *Teoretičeskaja aritmetika* [Theoretical Arithmetic], Moscow 1939.
 Becker, O., *Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung*, München 1954.
 Bourbaki, N., *Éléments d'histoire des mathématiques*, Paris 1960.
 Brunschvicg, Leon, *Les étapes de la philosophie mathématique*, Paris 1929.
 Dedekind, Richard, *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, Braunschweig 1912. [English tr., W. W. Beman, Open Court, Chicago 1901.]
 Dedekind, Richard, *Was sind und was sollen die Zahlen*, Braunschweig, 1923. [English tr. with previous essay.]
 Enriques, F., *Gli elementi d'Euclide e la critica antica e moderna* [Euclid's Elements and the Ancient and Modern Critics], Books V–IX, Bologna 1930.
 Euclid, *Elementi*, Books I, V, VII, VIII, X (transl. and commentary by A. Bilimović),

John Stillwell

MATHEMATICS AND ITS HISTORY

Second Edition



Springer

John Stillwell

Mathematics and Its History

Second Edition

With 181 Illustrations



Springer

John Stillwell
Department of Mathematics
University of San Francisco
San Francisco, CA 94117-1080
USA
stillwell@usfca.edu

Editorial Board

S. Axler
Mathematics Department
San Francisco State
University
San Francisco, CA 94132
USA

F.W. Gehring
Mathematics Department
East Hall
University of Michigan
Ann Arbor, MI 48109
USA

K.A. Ribet
Mathematics Department
University of California,
Berkeley
Berkeley, CA 94720-3840
USA

Mathematics Subject Classification (2000): 01-01

Library of Congress Cataloging-in-Publication Data
Stillwell, John

Mathematics and its history / John Stillwell. — 2nd ed.

p. cm. — (Undergraduate texts in mathematics)

Includes bibliographical references and index.

ISBN 0-387-95336-1 (alk. paper)

I. Mathematics—History. I. Title. II. Series.

QA21.S84 2001

510'.9—dc21

2001042958

ISBN 0-387-95336-1

Printed on acid-free paper.

© 2002, 1989 Springer-Verlag New York, Inc.

All rights reserved. This work may not be translated or copied in whole or in part without the written permission of the publisher (Springer-Verlag New York, Inc., 175 Fifth Avenue, New York, NY 10010, USA), except for brief excerpts in connection with reviews or scholarly analysis. Use in connection with any form of information storage and retrieval, electronic adaptation, computer software, or by similar or dissimilar methodology now known or hereafter developed is forbidden.

The use in this publication of trade names, trademarks, service marks, and similar terms, even if they are not identified as such, is not to be taken as an expression of opinion as to whether or not they are subject to proprietary rights.

Printed in the United States of America. (MVY)

9 8 7 6 5 4 3 2 (Corrected printing, 2004)

SPIN 10970676

Springer-Verlag is part of *Springer Science+Business Media*

springeronline.com

Greeks. The dubious seventeenth-century methods of infinitesimals were criticized by the Zeno of the time, Bishop Berkeley, but little was done to meet his objections until much later, since infinitesimals did not seem to lead to incorrect results. It was Dedekind, Weierstrass, and others in the nineteenth century who eventually restored Greek standards of rigor.

The story of rigor lost and rigor regained took an amazing turn when a previously unknown manuscript of Archimedes, *The Method*, was discovered in 1906. In it he reveals that his deepest results were found using dubious infinitary arguments, and only later proved rigorously. Because, as he says, "It is of course easier to supply the proof when we have previously acquired some knowledge of the questions by the method, than it is to find it without any previous knowledge."

The importance of this statement goes beyond its revelation that infinity can be used to discover results that are not initially accessible to logic. Archimedes was probably the first mathematician candid enough to explain that there is a difference between the way theorems are discovered and the way they are proved.

4.2 Eudoxus' Theory of Proportions

The theory of proportions is credited to Eudoxus (around 400–350 BCE) and is expounded in Book V of Euclid's *Elements*. The purpose of the theory is to enable lengths (and other geometric quantities) to be treated as precisely as numbers, while only admitting the use of rational numbers. We saw the motivation for this in Section 1.5: the Greeks could not accept irrational numbers, but they accepted irrational geometric quantities such as the diagonal of the unit square. To simplify the exposition of the theory, let us call lengths *rational* if they are rational multiples of a fixed length.

Eudoxus' idea was to say that a length λ is determined by those rational lengths less than it and those greater than it. To be precise, he says $\lambda_1 = \lambda_2$ if any rational length $< \lambda_1$ is also $< \lambda_2$, and vice versa. Likewise $\lambda_1 < \lambda_2$ if there is a rational length $> \lambda_1$ but $< \lambda_2$. This definition uses the rationals to give an infinitely sharp notion of length while avoiding any overt use of infinity. Of course the infinite set of rational lengths $< \lambda$ is present in spirit, but Eudoxus avoids mentioning it by speaking of an arbitrary rational length $< \lambda$.

The theory of proportions was so successful that it delayed the development of a theory of real numbers for 2000 years. This was ironic,

because the theory of proportions can be used to define irrational numbers just as well as lengths. It was understandable though, because the common irrational lengths, such as the diagonal of the unit square, arise from constructions that are intuitively clear and finite from the geometric point of view. Any *arithmetic* approach to $\sqrt{2}$, whether by sequences, decimals, or continued fractions, is infinite and therefore less intuitive. Until the nineteenth century this seemed a good reason for considering geometry to be a better foundation for mathematics than arithmetic. Then the problems of geometry came to a head, and mathematicians began to fear geometric intuition as much as they had previously feared infinity. There was a purge of geometric reasoning from the textbooks and industrious reconstruction of mathematics on the basis of numbers and sets of numbers. Set theory is discussed further in Chapter 23. Suffice to say, for the moment, that set theory depends on the acceptance of completed infinities.

The beauty of the theory of proportion was its adaptability to this new climate. Instead of rational lengths, take rational numbers. Instead of comparing existing irrational lengths by means of rational lengths, construct irrational numbers from scratch using sets of rationals! The length $\sqrt{2}$ is determined by the two sets of positive rationals

$$L_{\sqrt{2}} = \{r : r^2 < 2\}, \quad U_{\sqrt{2}} = \{r : r^2 > 2\}.$$

Dedekind (1872) decided to let $\sqrt{2}$ be this pair of sets! In general, let any partition of the positive rationals into sets L, U such that any member of L is less than any member of U be a positive real number. This idea, now known as a *Dedekind cut*, is more than just a twist of Eudoxus; it gives a complete and uniform construction of all real numbers, or points on the line, using just the *discrete*, finally resolving the fundamental conflict in Greek mathematics. Dedekind was understandably pleased with his achievement. He wrote

The statement is so frequently made that the differential calculus deals with continuous magnitude, and yet an explanation of this continuity is nowhere given.... It then only remained to discover its true origin in the elements of arithmetic and thus at the same time secure a real definition of the essence of continuity. I succeeded Nov. 24 1858.

[Dedekind (1872), p. 2]

EXERCISES

There is only one Dedekind cut (L, U) corresponding to an irrational number α , but there are two cuts corresponding to a rational number a :

$$L = \{r : r \leq a\}, \quad U = \{r : r > a\}$$

and

$$L = \{r : r < a\}, \quad U = \{r : r \geq a\}.$$

To unify the theory of all reals we choose the latter cut, call it

$$L_a = \{r : r < a\}, \quad U_a = \{r : r \geq a\},$$

as the standard way to represent a rational a . We can then say, whether x is rational or irrational, that the lower set for x is

$$L_x = \{r : r < x\}.$$

Now we use lower sets to define $x + y$ and xy for positive reals x and y as follows:

$$L_{x+y} = \{r + s : r < x \text{ and } s < y, \text{ where } r, s \text{ are rational}\}$$

$$L_{xy} = \{rs : r < x \text{ and } s < y, \text{ where } r, s \text{ are rational}\}.$$

4.2.1 Show that these are valid definitions of $x + y$ and xy when x and y are rational.

The true power of these definitions, as Dedekind realized, is that they allow rigorous proofs of results like $\sqrt{2}\sqrt{3} = \sqrt{6}$ that (in Dedekind's opinion) had never been rigorously proved before. Such proofs are possible, but still not trivial. Even to prove that $\sqrt{2}\sqrt{2} = 2$ one still has to prove the next two results.

4.2.2 If $r^2 < 2$ and $s^2 < 2$, show that $rs < 2$.

4.2.3 If a rational $t < 2$, show that $t = rs$ for some rational r, s with $r^2 < 2, s^2 < 2$.

4.2.4 Why do Exercises 4.2.2 and 4.2.3 show that $\sqrt{2}\sqrt{2} = 2$?

4.2.5 Give a similar proof that $\sqrt{2}\sqrt{3} = \sqrt{6}$.

4.3 The Method of Exhaustion

The method of exhaustion, also credited to Eudoxus, is a generalization of his theory of proportions. Just as an irrational length is determined by the rational lengths on either side of it, more general unknown quantities become determined by arbitrarily close approximations using known figures. Examples given by Eudoxus (and expounded in Book XII of Euclid's

Elements) are an approximation of the circle by inner and outer polygons (Figure 4.1) and an approximation of a pyramid by stacks of prisms (Figure 4.2, which shows the most obvious approximation, not the cunning one actually used by Euclid). In both cases the approximating figures are known quantities, on the basis of the theory of proportions and the theorem that area of triangle = $1/2$ base \times height.

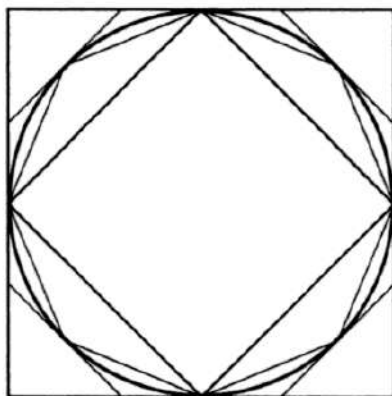


Figure 4.1: Approximating the circle

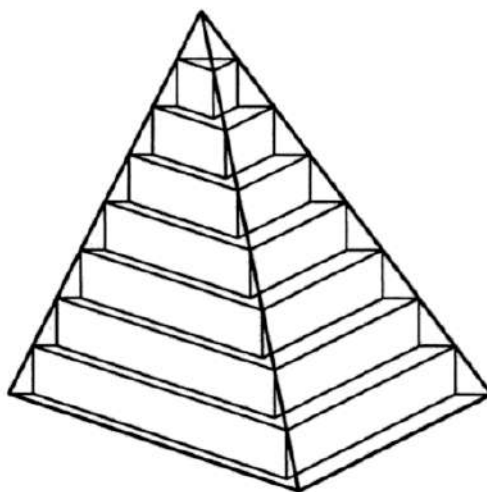


Figure 4.2: Approximating the pyramid

The polygonal approximations are used to show that the area of any circle is proportional to the square on its radius, as follows. Suppose $P_1 \subset P_2 \subset P_3 \subset \dots$ are the inner polygons and $Q_1 \supset Q_2 \supset Q_3 \supset \dots$ are the outer polygons. Each polygon is obtained from its predecessor by bi-

EXERCISES

Although the method of exhaustion is not needed for the area theory of polygons, it is nevertheless a helpful stepping stone toward cases where exhaustion *is* necessary, such as volumes of polyhedra or areas of curved regions.

- 4.3.1** Show that the area of two triangles with the same base and height can be approximated arbitrarily closely by the same set of rectangles, differently stacked (Figure 4.5).

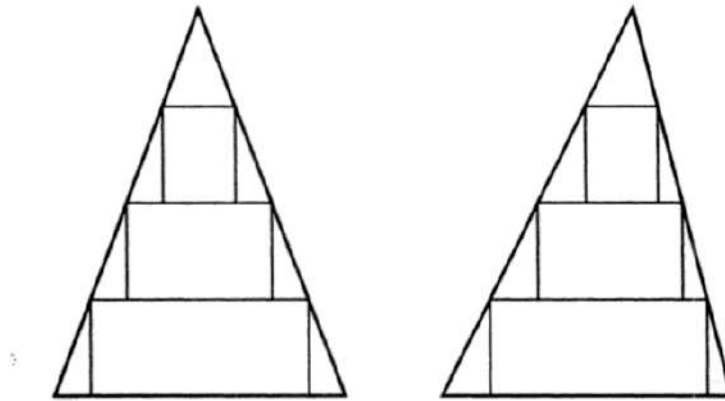


Figure 4.5: Approximations to triangles

- 4.3.2** Show similarly that any two tetrahedra with the same base and height can be approximated arbitrarily closely by the same prisms, differently stacked (Figure 4.6).

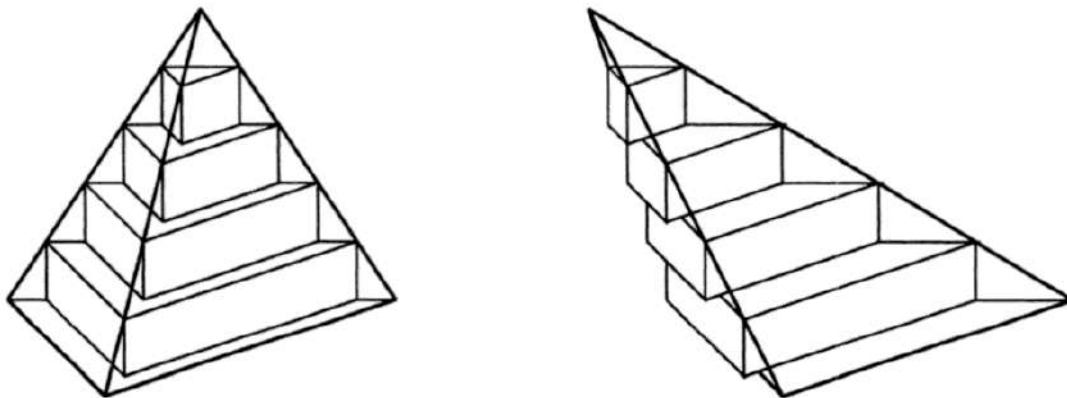


Figure 4.6: Approximations to tetrahedra

Around 1800, Legendre used the result of Exercise 4.3.2 to give another proof that the volume of a pyramid is $\frac{1}{3}$ that of a prism with the same base and height [see Heath (1925), Book XII, Proposition 5]. He used the above dissection of a